Unioni finite e numerabili di intervalli,
il volume degli insiemi aperti

In questa esposizione chiameremo brevemente intervallo

- in $\mathbb{R}$ ogni insieme del tipo $\big[a\,,b\big)=\big\{x\in\mathbb{R}\,;\,a\leq x<b\big\}$ dove $a\,,b$ sono numeri reali (ovviamente, $\big[a\,,b\big)\neq\emptyset \iff a<b$)

ed

- in $\mathbb{R}^n$ ogni insieme del tipo $\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\big[a_j\,,b_j\big)$ dove $a_j\,,b_j\,,1\leq j\leq n\,,$ sono numeri reali.

Rimarchiamo che l'intersezione di due intervalli

$$I=\prod_{j=1}^{n}\big[a_j\,,b_j\big) \text{ e } I'=\prod_{j=1}^{n}\big[a_j'\,,b_j'\big)$$

è pure un intervallo :

$$I\cap I'=\prod_{j=1}^{n}\Big[\max(a_j,a_j')\,,\min(b_j,b_j')\Big)\,.$$

Le estremità di $I=\big[a\,,b\big)$ saranno indicati con $a(I)=a$ e $b(I)=b\,.$

Se $I=\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\big[a_j\,,b_j\big)$ e $b_1-a_1=\;...\;=b_n-a_n$ allora diremo che I è un cubo.

Se $I=\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\big[a_j\,,b_j\big)$ e le estremità a_j e b_j sono numeri razionali della forma $\dfrac{q}{2^k}$ con $q\in\mathbb{Z}$ e $k\geq 0$ intero allora diremo che I è un intervallo diadico.

Il volume di $I=\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\big[a_j\,,b_j\big)$ è per definizione

$$v(I)=\prod_{j=1}^{n}(b_j-a_j)\,.$$

Dimostriamo la seguente

Formula per il volume degli intervalli. *Per ogni intervallo* $I\subset\mathbb{R}^n$ *vale*

$$v(I)=\lim_{q\to\infty}\frac{1}{q^n}\,\mathrm{card}\bigg(I\cap\frac{1}{q}\mathbb{Z}^n\bigg)\,. \tag{*}$$

Dimostrazione. Useremo induzione rispetto alla dimensione n.

$\boxed{\text{Per } n = 1 :}$

Siano $I = \big[a\,,b\big)$ e $q \geq 1$. Elenchiamo gli elementi di $I \cap \dfrac{1}{q}\mathbb{Z}$ in ordine crescente :

$$\frac{p_1}{q} < \frac{p_1 + 1}{q} < \ ... \ < \frac{p_2}{q} \ .$$

Allora

$$\left[\frac{p_1}{q}\,,\frac{p_2}{q}\right) \subset I \subset \left[\frac{p_1 - 1}{q}\,,\frac{p_2 + 1}{q}\right)$$

e risulta

$$\frac{p_2 - p_1}{q} \leq v(I) \leq \frac{p_2 - p_1}{q} + \frac{2}{q}$$

cioè

$$\frac{1}{q}\,\mathrm{card}\Big(I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}\Big) - \frac{1}{q} \leq v(I) \leq \frac{1}{q}\,\mathrm{card}\Big(I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}\Big) + \frac{1}{q} \ .$$

Di conseguenza

$$\left| v(I) - \frac{1}{q}\,\mathrm{card}\Big(I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}\Big)\right| \leq \frac{1}{q}$$

e risulta (*) per $n = 1$.

$\boxed{\text{Il passo di induzione :}}$

Supponiamo che $n \geq 2$ e che (*) vale per $n - 1$ al posto di n.

Sia ora $I = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \big[a_j\,,b_j\big)$ un qualsiasi intervallo n-dimensionale. Allora

$I = I_1 \times I_2$ con

$I_1 = \big[a_1\,,b_1\big)$ un intervallo in $\mathbb{R}$ e

$I_2 = \displaystyle\prod_{j=2}^{n} \big[a_j\,,b_j\big)$ un intervallo $(n-1)$-dimensionale.

Per la prima parte della dimostrazione e per l'ipotesi di induzione abbiamo

$$v(I_1) = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} \operatorname{card}\left(I_1 \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}\right),$$
$$v(I_2) = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q^{n-1}} \operatorname{card}\left(I_2 \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^{n-1}\right),$$

perciò

$$\begin{aligned} v(I) &= v(I_1)\cdot v(I_2) \\ &= \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q^n} \operatorname{card}\left(I_1 \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}\right) \operatorname{card}\left(I_2 \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^{n-1}\right) \\ &= \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q^n} \operatorname{card}\left(\left(I_1 \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}\right) \times \left(I_2 \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^{n-1}\right)\right) \\ &= \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q^n} \operatorname{card}\left(I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^n\right). \end{aligned}$$

■

Lemma 1. *Se $I \subset \mathbb{R}^n$ è un intervallo e $\big(I_j\big)_{1\le j\le k}$ è una famiglia finita di intervalli in $\mathbb{R}^n$ che ricoprono I allora*

$$v(I) \le \sum_{1\le j\le k} v(I_j)\,.$$

Dimostrazione usando la formula (*). Per ogni $q \ge 1$ abbiamo

$$I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^n \subset \bigcup_{1\le j\le k} \left(I_j \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^n\right)$$

e quindi

$$\operatorname{card}\left(I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^n\right) \le \sum_{1\le j\le k} \operatorname{card}\left(I_j \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^n\right).$$

Usando (*) risulta :

$$\begin{aligned} v(I) &= \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q^n} \operatorname{card}\left(I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^n\right) \\ &\le \sum_{1\le j\le k} \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q^n} \operatorname{card}\left(I_j \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^n\right) = \sum_{1\le j\le k} v(I_j)\,. \end{aligned}$$

Dimostrazione usando partizioni prodotto. Poiché

$$I \subset \bigcup_{1\leq j\leq k} I_j \iff I = \bigcup_{1\leq j\leq k} \big(I \cap I_j\big)\,,$$

possiamo assumere senza minore generalità che $I = \bigcup\limits_{1\leq j\leq k} I_j\,.$

Possiamo anche assumere che nessuno degli intervalli $I\,, I_1\,, \dots, I_k$ sia vuoto, cioè che, con

$$I = \prod_{p=1}^{n} \big[a_p\,, b_p\big)\,,$$

$$I_j = \prod_{p=1}^{n} \big[a_p^{(j)}\,, b_p^{(j)}\big)\,, \qquad 1 \leq j \leq k\,,$$

abbiamo

$$a_p < b_p \text{ e } a_p^{(j)} < b_p^{(j)}\,,\; 1 \leq j \leq k\,,$$

per ogni $1 \leq p \leq n\,.$

Mettiamo gli elementi di

$$\bigcup_{1\leq j\leq k} \big\{a_p^{(j)}\,, b_p^{(j)}\big\}\,, \qquad 1 \leq p \leq n$$

in ordine crescente :

$$x_p^{(0)} < x_p^{(1)} < \dots < x_p^{(m_p)}\,.$$

Allora

$$x_p^{(0)} = a_p \text{ e } x_p^{(m_p)} = b_p\,, \qquad 1 \leq p \leq n$$

ed, indicando per ogni $0 < l_1 \leq m_1\,, \dots, 0 < l_n \leq m_n$

$$J_{l_1,\dots,l_n} := \big[x_1^{(l_1-1)}, x_1^{(l_1)}\big) \times \dots \times \big[x_n^{(l_n-1)}, x_n^{(l_n)}\big)\,,$$

abbiamo

$$I = \bigcup_{\substack{0<l_1\leq m_1\\ \vdots \\ 0<l_n\leq m_n}} J_{l_1,\dots,l_n}\,,$$

$$I_j = \bigcup_{\substack{a_1^{(j)}<x_1^{(l_1)}\leq b_1^{(j)}\\ \vdots \\ a_n^{(j)}<x_n^{(l_n)}\leq b_n^{(j)}}} J_{l_1,\dots,l_n} = \bigcup_{J_{l_1,\dots,l_n}\subset I_j} J_{l_1,\dots,l_n}\,, \qquad 1 \leq j \leq k\,,$$

quindi

$$v(I) = \sum_{\substack{0<l_1\leq m_1\\ \vdots \\ 0<l_n\leq m_n}} v(J_{l_1,\,\dots\,,l_n})\,,$$

$$v(I_j) = \sum_{J_{l_1,\,\dots\,,l_n}\subset I_j} v(J_{l_1,\,\dots\,,l_n})\,, \qquad 1\leq j\leq k\,. \tag{1}$$

Ora (1) implica

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq j\leq k} v(I_j) &= \sum_{1\leq j\leq k}\ \sum_{J_{l_1,\,\dots\,,l_n}\subset I_j} v(J_{l_1,\,\dots\,,l_n})\\ &= \sum_{\substack{0<l_1\leq m_1\\ \vdots \\ 0<l_n\leq m_n}} \mathrm{card}\big\{1\leq j\leq k\,;\ J_{l_1,\,\dots\,,l_n}\subset I_j\big\}\, v(J_{l_1,\,\dots\,,l_n})\,.\end{aligned}$$

Poiché

$$v(I) = \sum_{\substack{0<l_1\leq m_1\\ \vdots \\ 0<l_n\leq m_n}} v(J_{l_1,\,\dots\,,l_n})\,,$$

per dimostrare la disuguaglianza $v(I)\leq \sum\limits_{1\leq j\leq k} v(I_j)$ basta verificare che

$$\mathrm{card}\big\{1\leq j\leq k\,;\ J_{l_1,\,\dots\,,l_n}\subset I_j\big\}\geq 1$$

per ogni $J_{l_1,\,\dots\,,l_n}$.

Ma

$$\bigcup_{\substack{0<l_1\leq m_1\\ \vdots \\ 0<l_n\leq m_n}} J_{l_1,\,\dots\,,l_n} = I = \bigcup_{1\leq j\leq k} I_j$$

implica che ogni $J_{l_1,\,\dots\,,l_n}$ interseca un $I_{j(l_1,\,\dots\,,l_n)}$ con $1\leq j(l_1,\,\dots\,,l_n)\leq k$ ed allora

$$J_{l_1,\,\dots\,,l_n}\subset I_{j(l_1,\,\dots\,,l_n)}\ :$$

Infatti, se esiste $(x_1\,,\,...\,,x_n)\in J_{l_1,\,...\,,l_n}\cap I_{j(l_1,\,...\,,l_n)}$ allora abbiamo

$$\max\left(x_p^{(l_p-1)}\,,a_p^{(j(l_1,\,...\,,l_n))}\right)<\min\left(x_p^{(l_p)}\,,b_p^{(j(l_1,\,...\,,l_n))}\right),\qquad 1\le p\le n\,.$$

Per ogni $1\le p\le n$ risultano

$$\begin{aligned}a_p^{(j(l_1,\,...\,,l_n))}<x_p^{(l_p)}&\Longrightarrow a_p^{(j(l_1,\,...\,,l_n))}\le x_p^{(l_p-1)},\\ x_p^{(l_p-1)}<b_p^{(j(l_1,\,...\,,l_n))}&\Longrightarrow x_p^{(l_p)}\le b_p^{(j(l_1,\,...\,,l_n))}\end{aligned}$$

e quindi

$$\left[x_p^{(l_p-1)}\,,x_p^{(l_p)}\right)\subset\left[a_p^{(j(l_1,\,...\,,l_n))}\,,b_p^{(j(l_1,\,...\,,l_n))}\right).$$

Cosicché

$$\begin{aligned}J_{l_1,\,...\,,l_n}&=\left[x_1^{(l_1-1)}\,,x_1^{(l_1)}\right)\times\,...\,\times\left[x_n^{(l_n-1)}\,,x_n^{(l_n)}\right)\\&\subset\left[a_1^{(j(l_1,\,...\,,l_n))}\,,b_1^{(j(l_1,\,...\,,l_n))}\right)\times\,...\,\times\left[a_n^{(j(l_1,\,...\,,l_n))}\,,b_n^{(j(l_1,\,...\,,l_n))}\right)\\&=I_{j(l_1,\,...\,,l_n)}\,.\end{aligned}$$

■

Si potrebbe chiedere: perché dare la seconda dimostrazione di Lemma 1 quando la prima è molto più semplice e breve? La risposta è che la seconda dimostrazione funziona anche in un ambito più generale. Infatti, se

$$g_j:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,,\qquad 1\le j\le n$$

sono funzioni crescenti, continue a sinistra, allora possiamo definire il *volume di Stieltjes* di $I=\prod_{j=1}^{n}\left[a_j\,,b_j\right)$ corrispondente a queste funzioni tramite

$$v_{g_1,\,...\,,g_n}(I)=\prod_{j=1}^{n}\left(g_j(b_j)-g_j(a_j)\right)$$

e la seconda dimostrazione di Lemma 1 funziona per dimostrare Lemma 1 anche per $v_{g_1,\,...\,,g_n}(\,\cdot\,)$ al posto di $v(\,\cdot\,)$.

Lemma 2. *Se $I\subset\mathbb{R}^n$ è un intervallo e $\left(I_j\right)_{j\ge1}$ è una famiglia numerabile di intervalli in $\mathbb{R}^n$ che ricoprono I, allora*

$$v(I)\le\sum_{j\ge1}v(I_j)\,.$$

Dimostrazione. Per $\sum\limits_{j\geq 1} v(I_j) = +\infty$ e per $v(I) = 0$ la disuguaglianza a dimostrare è banale, perciò assumeremo nel seguito che $\sum\limits_{j\geq 1} v(I_j) < +\infty$ e $v(I) > 0$.

Siano

$$I = \prod_{p=1}^{n} \big[a_p\,, b_p\big)\,,$$
$$I_j = \prod_{p=1}^{n} \big[a_p^{(j)}\,, b_p^{(j)}\big)\,, \qquad j \geq 1\,.$$

Sia $0 < \varepsilon < \min\limits_{1\leq p\leq n} \big(b_p - a_p\big)$ qualsiasi e scegliamo per ogni $j \geq 1$ un $\varepsilon_j > 0$ tale che

$$\prod_{p=1}^{n} \big(b_p^{(j)} - a_p^{(j)} + \varepsilon_j\big) \leq \prod_{p=1}^{n} \big(b_p^{(j)} - a_p^{(j)}\big) + \frac{\varepsilon}{2^j}\,.$$

Poiché $I \subset \bigcup\limits_{j\geq 1} I_j$, gli insiemi aperti

$$\prod_{p=1}^{n} \big(a_p^{(j)} - \varepsilon_j\,, b_p^{(j)}\big) \supset I_j\,, \qquad j \geq 1\,.$$

ricoprono l'insieme compatto

$$\prod_{p=1}^{n} \big[a_p\,, b_p - \varepsilon\big] \subset I\,.$$

Perciò esiste $k(\varepsilon) \geq 1$ (dipendente da ε!) tale che

$$\begin{aligned}\prod_{p=1}^{n} \big[a_p\,, b_p - \varepsilon\big) &\subset \prod_{p=1}^{n} \big[a_p\,, b_p - \varepsilon\big] \\ &\subset \bigcup_{1\leq j\leq k(\varepsilon)} \prod_{p=1}^{n} \big(a_p^{(j)} - \varepsilon_j\,, b_p^{(j)}\big) \subset \bigcup_{1\leq j\leq k(\varepsilon)} \prod_{p=1}^{n} \big[a_p^{(j)} - \varepsilon_j\,, b_p^{(j)}\big)\end{aligned}$$

e Lemma 1 implica che

$$\prod_{p=1}^{n} \big(b_p - a_p - \varepsilon\big) = v\bigg(\prod_{p=1}^{n} \big[a_p\,, b_p - \varepsilon\big)\bigg)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq v\Big(\bigcup_{1\leq j\leq k(\varepsilon)} \prod_{p=1}^{n} \big[a_p^{(j)} - \varepsilon_j \,, b_p^{(j)}\big)\Big) \\
&= \sum_{1\leq j\leq k(\varepsilon)} \prod_{p=1}^{n} \big(b_p^{(j)} - a_p^{(j)} + \varepsilon_j\big) \\
&\leq \sum_{1\leq j\leq k(\varepsilon)} \left(\prod_{p=1}^{n} \big(b_p^{(j)} - a_p^{(j)}\big) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \\
&\leq \sum_{j\geq 1} \left(\prod_{p=1}^{n} \big(b_p^{(j)} - a_p^{(j)}\big) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \\
&= \varepsilon + \sum_{j\geq 1} v(I_j) \ .
\end{aligned}
$$

Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ si ottiene

$$
v(I) = \lim_{\varepsilon\to 0} \prod_{p=1}^{n} \big(b_p - a_p - \varepsilon\big) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \Big(\varepsilon + \sum_{j\geq 1} v(I_j)\Big) = \sum_{j\geq 1} v(I_j) \ .
$$

■

Lemma 3. *Se $I \subset \mathbb{R}^n$ è un intervallo e $\big(I_j\big)_{1\leq j\leq k}$ è una famiglia finita di intervalli a due a due disgiunti in $\mathbb{R}^n$ che sono contenuti in I, allora*

$$
\sum_{1\leq j\leq k} v(I_j) \leq v(I) \, .
$$

Dimostrazione usando la formula (*). Per ogni $q \geq 1$ abbiamo

$$
\bigcup_{1\leq j\leq k} \left(I_j \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^n \right) \subset I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^n
$$

e, poiché gli insiemi $I_j \cap \dfrac{1}{q}\mathbb{Z}^n, 1 \leq j \leq k$, sono a due a due disgiunti, risulta

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\leq j\leq k} \mathrm{card}\Big(I_j \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^n \Big) &= \mathrm{card}\Bigg(\bigcup_{1\leq j\leq k} \Big(I_j \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^n \Big)\Bigg) \\
&\leq \mathrm{card}\Big(I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^n \Big) \, .
\end{aligned}
$$

Usando (*) concludiamo :

$$\begin{aligned}\sum_{1\le j\le k} v(I_j) = & \sum_{1\le j\le k} \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q^n}\operatorname{card}\biggl(I_j \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^n\biggr)\\ & \le \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q^n}\operatorname{card}\biggl(I \cap \frac{1}{q}\mathbb{Z}^n\biggr)\\ & = v(I)\,.\end{aligned}$$

Dimostrazione usando partizioni prodotto. Possiamo supporre senza minore generalità che nessuno degli intervalli $I\,, I_1\,, \dots\,, I_k$ sia vuoto, cioè che, con

$$I = \prod_{p=1}^{n} \bigl[a_p\,, b_p\bigr)\,,$$
$$I_j = \prod_{p=1}^{n} \bigl[a_p^{(j)}\,, b_p^{(j)}\bigr)\,, \qquad 1\le j\le k\,,$$

abbiamo

$$a_p < b_p \;\text{ e }\; a_p^{(j)} < b_p^{(j)}\,,\; 1\le j\le k\,,$$

per ogni $1\le p\le n$.

Mettiamo gli elementi di

$$\bigl\{a_p\,, b_b\bigr\} \cup \bigcup_{1\le j\le k} \bigl\{a_p^{(j)}\,, b_p^{(j)}\bigr\}\,, \qquad 1\le p\le n$$

in ordine crescente :

$$x_p^{(0)} < x_p^{(1)} < \;\dots\; < x_p^{(m_p)}\,.$$

Allora

$$x_p^{(0)} = a_p \;\text{ e }\; x_p^{(m_p)} = b_p\,, \qquad 1\le p\le n$$

ed, indicando per ogni $0<l_1\le m_1\,, \dots, 0<l_n\le m_n$

$$J_{l_1,\dots,l_n} := \bigl[x_1^{(l_1-1)}, x_1^{(l_1)}\bigr) \times \dots \times \bigl[x_n^{(l_n-1)}, x_n^{(l_n)}\bigr)\,,$$

abbiamo

$$I = \bigcup_{\substack{0<l_1\le m_1\\ \vdots\\ 0<l_n\le m_n}} J_{l_1,\dots,l_n}\,,$$

$$I_j = \bigcup_{\substack{a_1^{(j)} < x_1^{(l_1)} \leq b_1^{(j)} \\ \vdots \\ a_n^{(j)} < x_n^{(l_n)} \leq b_n^{(j)}}} J_{l_1, \dots, l_n} = \bigcup_{J_{l_1, \dots, l_n} \subset I_j} J_{l_1, \dots, l_n} \,, \qquad 1 \leq j \leq k \,,$$

quindi

$$v(I) = \sum_{\substack{0 < l_1 \leq m_1 \\ \vdots \\ 0 < l_n \leq m_n}} v(J_{l_1, \dots, l_n}) \,,$$

$$v(I_j) = \sum_{J_{l_1, \dots, l_n} \subset I_j} v(J_{l_1, \dots, l_n}) \,, \qquad 1 \leq j \leq k \,. \tag{2}$$

Ora (2) implica

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j \leq k} v(I_j) &= \sum_{1 \leq j \leq k} \ \sum_{J_{l_1, \dots, l_n} \subset I_j} v(J_{l_1, \dots, l_n}) \\ &= \sum_{\substack{0 < l_1 \leq m_1 \\ \vdots \\ 0 < l_n \leq m_n}} \mathrm{card}\big\{1 \leq j \leq k \,;\, J_{l_1, \dots, l_n} \subset I_j\big\} \, v(J_{l_1, \dots, l_n}) \,. \end{aligned}$$

Ma poiché gli intervalli $I_j \,, 1 \leq j \leq k$, sono a due a due disgiunti,

$$\mathrm{card}\big\{1 \leq j \leq k \,;\, J_{l_1, \dots, l_n} \subset I_j\big\} = 0 \ \text{ oppure } \ 1$$

e risulta

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j \leq k} v(I_j) &= \sum_{\substack{0 < l_1 \leq m_1 \\ \vdots \\ 0 < l_n \leq m_n}} \mathrm{card}\big\{1 \leq j \leq k \,;\, J_{l_1, \dots, l_n} \subset I_j\big\} \, v(J_{l_1, \dots, l_n}) \\ &\leq \sum_{\substack{0 < l_1 \leq m_1 \\ \vdots \\ 0 < l_n \leq m_n}} v(J_{l_1, \dots, l_n}) \\ &= v(I) \,. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Lemma 4. *Se $I \subset \mathbb{R}^n$ è un intervallo e $\big(I_j\big)_{j\geq 1}$ è una famiglia numerabile di intervalli a due a due disgiunti in $\mathbb{R}^n$ che sono contenuti in I, allora*

$$\sum_{j\geq 1} v(I_j) \leq v(I)\,.$$

Dimostrazione. Lemma 3 implica

$$\sum_{j=1}^{k} v(I_j) \leq v(I) \ \text{ per ogni } \ k \geq 1$$

e risulta :

$$\sum_{j\geq 1} v(I_j) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} v(I_j) \leq v(I)\,.$$

■

Teorema sul volume di unioni numerabili di intervalli. *Siano $\big(I_j\big)_{j\geq 1}$ e $\big(J_k\big)_{k\geq 1}$ famiglie numerabili di intervalli in $\mathbb{R}^n$ e supponiamo che*

$$\bigcup_{k\geq 1} J_k \subset \bigcup_{j\geq 1} I_j\,,$$

$J_k\,, k \geq 1\,,$ *sono a due a due disgiunti.*

Allora

$$\sum_{k\geq 1} v(J_k) \leq \sum_{j\geq 1} v(I_j)\,.$$

Dimostrazione. Definiamo gli intervalli

$$I_{kj} := J_k \cap I_j\,, \qquad k\,, j \geq 1\,.$$

Per Lemma 2

$$J_k = \bigcup_{j\geq 1} I_{kj} \implies v(J_k) \leq \sum_{j\geq 1} v(I_{kj})\,, \qquad k \geq 1$$

e per Lemma 4

$$\bigcup_{k\geq 1} I_{kj} \subset I_j \implies \sum_{k\geq 1} v(I_{kj}) \leq v(I_j)\,, \qquad j \geq 1\,,$$

perciò

$$\sum_{k\geq 1} v(J_k) \leq \sum_{k\geq 1}\sum_{j\geq 1} v(I_{kj}) = \sum_{j\geq 1}\sum_{k\geq 1} v(I_{kj}) \leq \sum_{j\geq 1} v(I_j)\ .$$

■

Risulta subito che la somma dei volumi di una successione di intervalli a due a due disgiunti dipende solo dall'unione degli intervalli della successione. In altre parole, se due successioni di intervalli a due a due disgiunti hanno la stessa unione, allora hanno anche la stessa somma di volumi di intervalli :

Corollario. *Siano* $\big(I_j\big)_{j\geq 1}$ *e* $\big(J_k\big)_{k\geq 1}$ *famiglie numerabili di intervalli in* $\mathbb{R}^n$ *e supponiamo che*

$$\bigcup_{k\geq 1} J_k = \bigcup_{j\geq 1} I_j\ ,$$

$J_k\,, k\geq 1\,,$ *sono a due a due disgiunti,*

$I_j\,, j\geq 1\,,$ *sono a due a due disgiunti.*

Allora

$$\sum_{k\geq 1} v(J_k) = \sum_{j\geq 1} v(I_j)\ .$$

■

Teorema sulla decomposizione di insiemi aperti in intervalli. *Per ogni insieme aperto* $U\subset\mathbb{R}^n$ *ed ogni* $\varepsilon>0$ *esiste una successione* $\big(I_j\big)_{j\geq 1}$ *di cubi diadici a due a due disgiunti e di diametro* $<\varepsilon$ *tale che*

$$U = \bigcup_{j\geq 1} I_j = \bigcup_{j\geq 1} \overline{I_j}\ .$$

Dimostrazione. Indichiamo per ogni intero $k\geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_k &:= \left\{ \left[\frac{q_1}{2^k}\,,\frac{q_1+1}{2^k}\right) \times\ ...\ \times \left[\frac{q_n}{2^k}\,,\frac{q_n+1}{2^k}\right)\,,\ q_1\,,\ ...\,, q_n\in\mathbb{Z}\right\}\ ,\\
\mathcal{U}_k &:= \left\{ I\in\mathcal{J}_k\,;\, \overline{I}\subset U\right\}\ .
\end{aligned}$$

Gli intervalli appartenenti ad ogni $\mathcal{J}_k$ (quindi anche gli intervalli appartenenti ad ogni $\mathcal{U}_k$) sono cubi diadici a due a due disgiunti.

Ogni $I\in\mathcal{J}_k$ è unione di 2^n cubi appartenenti a $I\in\mathcal{J}_{k+1}$: se

$$I = \left[\frac{q_1}{2^k}\,,\frac{q_1+1}{2^k}\right) \times \,...\, \times \left[\frac{q_n}{2^k}\,,\frac{q_n+1}{2^k}\right)$$

allora

$$I = \bigcup_{\substack{2q_1 \leq r_1 \leq 2q_1+1 \\ \vdots \\ 2q_n \leq r_n \leq 2q_n+1}} \left[\frac{r_1}{2^{k+1}}\,,\frac{r_1+1}{2^{k+1}}\right) \times \,...\, \times \left[\frac{r_n}{2^{k+1}}\,,\frac{r_n+1}{2^{k+1}}\right)\,.$$

Risulta

$$\bigcup_{I\in\mathcal{U}_1} I \subset \bigcup_{I\in\mathcal{U}_2} I \subset \,...\, \subset \bigcup_{I\in\mathcal{U}_k} I \subset \,...\,. \tag{3}$$

Mostriamo ora che

$$U = \bigcup_{k\geq 1}\,\bigcup_{I\in\mathcal{U}_k} I \ : \tag{4}$$

L'inclusione $\supset$ è ovvia.,

Sia adesso $\big(x_1\,,\,...\,,x_n\big) \in U$ arbitrario. Poiché U è aperto, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\big(x_1 - \delta\,, x_1 + \delta\big) \times \,...\, \times \big(x_n - \delta\,, x_n + \delta\big) \subset U\ .$$

Scelto un intero $k \geq 1$ con $\dfrac{1}{2^k} < \delta$, indichiamo, per ogni $1 \leq j \leq n$, con q_j la parte intera di $2^k x_j$, cioè l'intero definito dalla condizione

$$q_j \leq 2^k x_j < q_j + 1 \iff \frac{q_j}{2^k} \leq x_j < \frac{q_j+1}{2^k}\ .$$

Allora

$$I_{(x_1\,,\,...\,,x_n)} := \left[\frac{q_1}{2^k}\,,\frac{q_1+1}{2^k}\right) \times \,...\, \times \left[\frac{q_n}{2^k}\,,\frac{q_n+1}{2^k}\right) \in \mathcal{J}_k$$

contiene $\big(x_1\,,\,...\,,x_n\big)$ e risulterà

$$\big(x_1\,,\,...\,,x_n\big) \in I_{(x_1\,,\,...\,,x_n)} \subset \bigcup_{k\geq 1}\,\bigcup_{I\in\mathcal{U}_k} I$$

se mostriamo che

$$\begin{aligned}\overline{I_{(x_1\,,\,...\,,x_n)}} &= \left[\frac{q_1}{2^k}\,,\frac{q_1+1}{2^k}\right] \times \,...\, \times \left[\frac{q_n}{2^k}\,,\frac{q_n+1}{2^k}\right] \\ &\subset \big(x_1 - \delta\,, x_1 + \delta\big) \times \,...\, \times \big(x_n - \delta\,, x_n + \delta\big)\ ,\end{aligned}$$

cioè che

$$x_j - \delta < \frac{q_j}{2^k} \iff x_j < \frac{q_j}{2^k} + \delta \text{ e}$$
$$\frac{q_j + 1}{2^k} < x_j + \delta \iff \frac{q_j}{2^k} - \left(\delta - \frac{1}{2^k}\right) < x_j$$

per ogni $1 \leq j \leq n$. Ma $x_j < \dfrac{q_j + 1}{2^k}$ e $\dfrac{1}{2^k} < \delta$ implicano $x_j < \dfrac{q_j}{2^k} + \delta$, mentre da $\dfrac{q_j}{2^k} \leq x_j$ e $\dfrac{1}{2^k} < \delta$ risulta $\dfrac{q_j}{2^k} - \left(\delta - \dfrac{1}{2^k}\right) < x_j$.

Sia $k_\varepsilon \geq 1$ un intero soddisfacente $\dfrac{\sqrt{n}}{k_\varepsilon} < \varepsilon$. Poiché il diametro (= il diagonale) di ogno cubo appartenente a $\mathcal{U}_k$ con $k \geq k_\varepsilon$ è $< \varepsilon$, (3) e (4) implicano

$$U = \bigcup_{k \geq k_\varepsilon} \bigcup_{I \in \mathcal{U}_k} I \tag{5}$$

dove il diametro di ogni cubo appartenente a $\displaystyle\bigcup_{k \geq k_\varepsilon} \bigcup_{I \in \mathcal{U}_k} I$ è $< \varepsilon$.

Indichiamo per ogni $k > 1$

$$\mathcal{D}_k := \left\{ I \in \mathcal{U}_k \, ; \, I \cap \bigcup_{J \in \mathcal{U}_{k-1}} J = \emptyset \right\}.$$

Allora

$$\bigcup_{I \in \mathcal{U}_k} I = \bigcup_{I \in \mathcal{U}_{k-1} \cup \mathcal{D}_k} I \, , \qquad k > 1 \ : \tag{6}$$

L'inclusione $\supset$ risulta dal fatto che ogni $I \in \mathcal{U}_{k-1}$ è l'unione di 2^n cubi appartenenti a $\mathcal{U}_k$.

Sia ora $I_o \in \mathcal{U}_k$ arbitrario. Se $I_o \cap \displaystyle\bigcup_{J \in \mathcal{U}_{k-1}} J = \emptyset$ allora $I_o \in \mathcal{D}_k$ e risulta

$$I_o \subset \bigcup_{I \in \mathcal{U}_{k-1} \cup \mathcal{D}_k} I \, .$$

Se invece $I_o \cap \displaystyle\bigcup_{J \in \mathcal{U}_{k-1}} J \neq \emptyset$ allora esiste un $J_o \in \mathcal{U}_{k-1}$ con $I_o \cap J_o \neq \emptyset$ e risulta

$$I_o \subset J_o \subset \bigcup_{I \in \mathcal{U}_{k-1} \cup \mathcal{D}_k} I \ :$$

Siano

$$\begin{aligned} I_o &= \left[\frac{q_1}{2^k}\,,\frac{q_1+1}{2^k}\right) \times \,...\, \times \left[\frac{q_n}{2^k}\,,\frac{q_n+1}{2^k}\right)\,, \\ J_o &= \left[\frac{r_1}{2^{k-1}}\,,\frac{r_1+1}{2^{k-1}}\right) \times \,...\, \times \left[\frac{r_n}{2^{k-1}}\,,\frac{r_n+1}{2^{k-1}}\right) \\ &= \left[\frac{2r_1}{2^k}\,,\frac{2r_1+1}{2^k}\right) \times \,...\, \times \left[\frac{2r_n}{2^k}\,,\frac{2r_n+2}{2^k}\right) \end{aligned}$$

e

$$\big(x_1\,,\,...\,,x_n\big) \in I_o \cap J_o\,.$$

Per ogni $1 \leq j \leq n$, poiché

$$\max\left(\frac{q_j}{2^k}\,,\frac{2r_j}{2^k}\right) \leq x_j < \min\left(\frac{q_j+1}{2^k}\,,\frac{2r_j+2}{2^k}\right)$$

e quindi

$$\max\big(q_j\,,2r_j\big) < \min\big(q_j+1\,,2r_j+2\big)\,,$$

abbiamo

$$\begin{aligned} 2r_j < q_j+1 &\Longrightarrow 2r_j \leq q_j \\ &\Longrightarrow \frac{r_j}{2^{k-1}} = \frac{2r_j}{2^k} \leq \frac{q_j}{2^k} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} q_j < 2r_j+2 &\Longrightarrow q_j+1 \leq 2r_j+2 \\ &\Longrightarrow \frac{q_j+1}{2^k} \leq \frac{2r_j+2}{2^k} = \frac{r_j+1}{2^{k-1}}\,. \end{aligned}$$

Risulta

$$\left[\frac{q_j}{2^k}\,,\frac{q_j+1}{2^k}\right) \subset \left[\frac{r_j}{2^{k-1}}\,,\frac{r_j+1}{2^{k-1}}\right), \qquad 1 \leq j \leq n$$

e di conseguenza $I_o \subset J_o$.

Usando (6) si ottiene per induzione

$$\bigcup_{I\in\mathcal{U}_k} I = \bigcup_{I\in\mathcal{U}_{k_\varepsilon}\cup\mathcal{D}_{k_\varepsilon+1}\cup\,...\,\cup\mathcal{D}_k} I\,, \qquad k > k_\varepsilon$$

dove i cubi appartenenti a $\mathcal{U}_{k_\varepsilon} \cup \mathcal{D}_{k_\varepsilon+1} \cup \ldots \cup \mathcal{D}_k$ sono a due a due disgiunti.

Ora per (5) concludiamo che

$$U = \bigcup_{k \geq k_\varepsilon} \bigcup_{I \in \mathcal{U}_k} I = \bigcup_{I \in \mathcal{U}_{k_\varepsilon} \cup \mathcal{D}_{k_\varepsilon+1} \cup \mathcal{D}_{k_\varepsilon+2} \cup \ldots} I$$

con i cubi appartenenti a $\mathcal{U}_{k_\varepsilon} \cup \mathcal{D}_{k_\varepsilon+1} \cup \mathcal{D}_{k_\varepsilon+2} \cup \ldots$ a due a due disgiunti.

$\blacksquare$

Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Se

$$U = \bigcup_{j \geq 1} I_j$$

è una decomposizione di U in intervalli a due a due disgiunti (possibile per il teorema precedente) allora possiamo definire il volume di U tramite

$$v(U) := \sum_{j \geq 1} v(I_k) \ .$$

Per il **Corollario** del **Teorema sul volume di unioni numerabili di intervalli** il valore $v(U)$ ottenuto non dipende dalla scelta della decomposizione.

Usando ora il **Teorema sulla decomposizione di insiemi aperti in intervalli** ed il **Teorema sul volume di unioni numerabili di intervalli** si può facilmente verificare (esercizio!):

- $U \subset V$ aperti in $\mathbb{R}^n \implies v(U) \leq v(V)$;
- $U_j \subset \mathbb{R}^n$, $j \geq 1$, aperti a due a due disgiunti $\implies$
  $v\Big(\bigcup_{j \geq 1} U_j\Big) = \sum_{j \geq 1} v(U_j)$;
- $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ aperti in $\mathbb{R}^n \implies v\Big(\bigcup_{j \geq 1} U_j\Big) = \lim_{j \to \infty} v(U_j)$.