NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 2, Test del 30.05.2008

1) Determinare gli intervalli in cui la seguente funzione è uniformamente continua e quelli in cui è lipschitziana :

$$f(x) = \operatorname{arctg}(\log x) \ .$$

2) Utilizzando la formula di Taylor, calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(\sin x)^3} \right) \operatorname{tg} x \ .$$

3) Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \sin x \cdot \operatorname{arctg}(\cos x)\ .$$

4) Determinare i valori del parametro reale α per cui il seguente integrale improprio converge e calcolare il valore dell'integrale nei casi di convergenza:

$$\int_0^1 x^\alpha \log \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \left(= -\int_0^1 x^\alpha \log x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^\alpha\,|\log x|\,\mathrm{d}x \right)\ .$$

5) Dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\,x^n\ .$$

Sulla continuità uniforma:

Un intervallo di numeri reali è un sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}$ tale che

$$I \ni x_1 \leq x \leq x_2 \in I \implies x \in I\,.$$

Per un intervallo I

$$a(I) = \inf_{x \in I} x \;\; \text{(appartenente a } \mathbb{R} \text{ o uguale a } -\infty)$$

è l'estremità inferiore di I, mentre

$$b(I) = \sup_{x \in I} x \;\; \text{(appartenente a } \mathbb{R} \text{ o uguale a } +\infty)$$

è l'estremità superiore. Si vede facilmente che I contiene

$$\big\{ x \in \mathbb{R}\,;\; a(I) < x < b(I) \big\}$$

ed è contenuto in

$$\big\{ x \in \mathbb{R}\,;\; a(I) \leq x \leq b(I) \big\}\,.$$

Le estremità $a(I)$ e $b(I)$, quando sono finite, possono appartenere ad I o no. Così abbiamo quattro tipi di intervalli I con l'estremità inferiore $a(I) = a$ e $b(I) = b$:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \big\{ x \in \mathbb{R}\,;\; a < x < b \big\}\,, \\
[a,b] &= \big\{ x \in \mathbb{R}\,;\; a \leq x \leq b \big\} \text{ (se } a\,, b \in \mathbb{R})\,, \\
[a,b) &= \big\{ x \in \mathbb{R}\,;\; a \leq x < b \big\} \text{ (se } a \in \mathbb{R})\,, \\
(a,b] &= \big\{ x \in \mathbb{R}\,;\; a < x \leq b \big\} \text{ (se } b \in \mathbb{R})\,.
\end{aligned}$$

Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si chiama *uniformamente continua* se

$f(x)$ e $f(y)$ sono arbitrariamente vicini
appena $x, y \in I$ sono sufficientemente vicini,
senza riguardo a dove si trovano x e y in I,

cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$x, y \in I\,,\; |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\,.$$

→ *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è uniformamente continua se e solo se per ogni due successioni $\big(x_n\big)_{n \geq 1}$ e $\big(y_n\big)_{n \geq 1}$ in I tale che $x_n - y_n \longrightarrow 0$ abbiamo*

$$f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che f è uniformamente continua e siano $\big(x_n\big)_{n\geq 1}$, $\big(y_n\big)_{n\geq 1} \subset I$ tale che $x_n - y_n \longrightarrow 0$.
Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$x, y \in I\,,\ |x-y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\,.$$

Ora, per $x_n - y_n \longrightarrow 0$ abbiamo $|x_n - y_n| \leq \delta$ da un indice n_o in poi e risulta

$$n \geq n_o \implies |x_n - y_n| \leq \delta \implies |f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon\,.$$

In altre parole, $f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0$.

Viceversa, supponiamo che per successioni

$$\big(x_n\big)_{n\geq 1}\,,\ \big(x_n\big)_{n\geq 1} \subset I$$

vale l'implicazione

$$x_n - y_n \longrightarrow 0 \implies f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0\,,$$

ma f non è uniformamente continua, cioè esiste un $\varepsilon_o > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ possiamo trovare

$$x_\delta, y_\delta \in I \text{ con } |x_\delta - y_\delta| \leq \delta \text{ e } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \varepsilon_o\,.$$

Allora, con $\delta = \frac{1}{n}$, troviamo due successioni $\big(x_n\big)_{n\geq 1}$, $\big(x_n\big)_{n\geq 1} \subset I$ tale che

$$|x_n - y_n| \leq \tfrac{1}{n}\,,\ |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_o\,,$$

in contradizione con l'ipotesi

$$x_n - y_n \longrightarrow 0 \implies f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0\,.$$

Ricordiamo il teorema classico di Georg Cantor:

→ *Se I è chiuso e limitato, cioè $I = [a,b]$ con $-\infty < a \leq b < +\infty$, allora ogni funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ è uniformamente continua.*

Dimostrazione. Vedi il libro di testo, paragrafo 81.

Per la continuità uniforma di una funzione definita su un intervallo non necessariamente chiuso, abbiamo il seguente criterio:

→ *Perché una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ sia uniformamente continua, è sufficiente l'esistenza dei limiti*

$$\lim_{x\to a(I)^+} f(x) \in \mathbb{R}\,, \qquad \lim_{x\to b(I)^-} f(x) \in \mathbb{R}\,.$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Se indichiamo

$$L_1 = \lim_{x \to a(I)^+} f(x) \in \mathbb{R}\,, \quad L_2 = \lim_{x \to b(I)^-} f(x) \in \mathbb{R}\,,$$

allora esistono $a' > a(I)$ e $b' < b(I)$ tale che

$$x \in I\,,\, x \leq a' \implies f(x) - L_1| \leq \frac{\varepsilon}{6}\,,$$
$$x \in I\,,\, x \geq b' \implies f(x) - L_2| \leq \frac{\varepsilon}{6}\,.$$

Poi, per il teorema di Cantor, f è uniformemente continua sull' intervallo chiuso limitato $[a', b']$, perciò esiste $\delta > 0$ tale che

$$x, y \in I\,,\, |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Siano ora $x\,, y \in I$ arbitrari tale che $0 \leq y - x \leq \delta$.

Se $x\,, y \in [a', b']$, allora dalla scelta di δ risulta

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon\,.$$

Se $x\,, y \leq a'$, allora

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - L_1| + |L_1 - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon\,.$$

Similmente, se $x\,, y \geq b'$, allora $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Poi, se $x \leq a' \leq y \leq b'$, allora

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(a')| + |f(a') - f(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Similmente, se $a' \leq x \leq b' \leq y$, allora $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Finalmente, se $x \leq a' \leq b' \leq y$, allora

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(a')| + |f(a') - f(b')| + |f(b') - f(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Cosicché abbiamo in tutti i casi $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Se I è limitato, allora la condizione sufficiente di cui sopra è anche necessaria per la continuità uniforma di f:

→ *Se la funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è uniformamente continua, allora*

$$a(I) > -\infty \implies \textit{esiste} \lim_{x \to a(I)^+} f(x) \in \mathbb{R}\,,$$
$$b(I) < +\infty \implies \textit{esiste} \lim_{x \to b(I)^-} f(x) \in \mathbb{R}\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo prima che $a(I) \in \mathbb{R}$.

Allora per ogni successione $I \ni x_n \longrightarrow a(I)$ la successione dei valori $\big(f(x_n)\big)_{n \geq 1}$ è di Cauchy, quindi converge. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$x, y \in I\,,\ |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\,,$$

e poi un $n_\delta \geq 1$ con $|x_n - x_k| \leq \delta$ per ogni $n\,, k \geq n_\delta$. Perciò

$$n\,, k \geq n_\delta \implies |f(x_n) - f(x_k)| \leq \varepsilon\,.$$

Ora, se $I \ni x_n \longrightarrow a(I)$ e $I \ni y_n \longrightarrow a(I)$, allora $x_n - y_n \longrightarrow 0$ implica che $f(x_n) - f(y_n) \longrightarrow 0$ e così $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(y_n)$. In altre parole esiste il limite finito $\lim\limits_{x \to a(I)^+} f(x)$.

Similmente si verifica che nel caso $b(I) \in \mathbb{R}$ la continuità uniforma di f implica l'esistemza del limite finito $\lim\limits_{x \to b(I)^-} f(x)$.

! Rimarchiamo che se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione uniformamente continua, ma $a(I) = -\infty$ o $b(I) = +\infty$, allora i limiti

$$\lim_{x \to a(I)^+} f(x) \ \text{rispettivamente} \ \lim_{x \to b(I)^-} f(x)$$

non esistono sempre. Per esempio, la funzione sin definita sull'intera retta $(-\infty, +\infty)$ è uniformamente continua (vedremo che è addirittura lipschitziana), ma nessuno dei limiti

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)\,, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

esiste.

Risulta la seguente versione del teorema di Cantor per funzioni continue su intervalli limitati arbitrari:

→ *Se I è limitato, cioè $a(I) > -\infty$ e $b(I) < +\infty$, allora per la continuità uniforma di una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ è necessaria e sufficiente l'esistenza dei limiti*

$$\lim_{x \to a(I)^+} f(x) \in \mathbb{R}\,, \quad \lim_{x \to b(I)^-} f(x) \in \mathbb{R}\,.$$

Finiamo le nostre considerazioni sulla continuità uniforma mostrando che basta verificarla su pezzi del dominio:

$\rightarrow$ *Supponiamo che I è l'unione di due intervalli $I_1\,,I_2$ ed $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ è uniformamente continua sia su I_1 che su I_2. Allora f è uniformamente continua su tutto I.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon>0$ arbitrario. Allora esistono $\delta_1\,,\delta_2>0$ tali che

$$x,y\in I_1\,,\ |x-y|\leq\delta_1 \implies |f(x)-f(y)|\leq\frac{\varepsilon}{2}\,,$$
$$x,y\in I_2\,,\ |x-y|\leq\delta_2 \implies |f(x)-f(y)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

ed indichiamo con δ il più grande di δ_1 e δ_2: $\delta=\max\,(\delta_1\,,\delta_2)$.

Siano adesso $x\,,y\in I$ tali che $|x-y|\leq\delta$. Se $x\,,y\in I_1$ oppure $x\,,y\in I_2$, allora abbiamo chiaramente $|f(x)-f(y)|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. Mostriamo che anche nei casi $x\in I_1\not\ni y$ e $x\in I_2\not\ni y$ abbiamo $|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$.

Supponiamo che $x\in I_1\not\ni y$ e, per farne una scelta, $x<y$. Allora $x\leq b(I_1)\leq y$ e, poiché $y\in I_2$, $a(I_2)\leq y$. Poi abbiamo necessariamente $a(I_2)\leq b(I_1)$, perché altrimenti l'intervallo non vuoto $\big(b(I_1)\,,a(I_1)\big)\subset I$ risulterebbe disgiunto sia ad I_1 che ad I_2, quindi ad I. Perciò

$$\big[x\,,b(I_1)\big)\subset I_1\,,\quad \big(b(I_1)\,,y\big]\subset I_2\,,\quad b(I_1)\in I\,.$$

Per ogni $x'\in\big[x\,,b(I_1)\big)\subset I_1$ abbiamo

$$x'-x\leq b(I_1)-x\leq y-x\leq\delta_1\,,$$

perciò $|f(x')-f(x)|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$. Per $x'\rightarrow b(I_1)$ risulta

$$\big|f\big(b(I_1)\big)-f(x)\big|\leq\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Similmente si verifica che

$$\big|f(y)-f\big(b(I_1)\big)\big|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

e concludiamo :

$$\begin{aligned}\big|f(y)-f(x)\big|&\leq\big|f(y)-f\big(b(I_1)\big)\big|+\big|f\big(b(I_1)\big)-f(x)\big|\\&\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Sulle funzioni lipschitziane:

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si chiama *lipschitziana* (o *di Lipschitz*) se esiste una costante $L \geq 0$ tale che
$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|\,, \qquad x\,, y \in I\,.$$
In altre parole, f è lipschitziana se i moduli di tutti i suoi rapporti incrementali sono limitati da una costante L:
$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq L\,, \qquad x\,, y \in I\,,\ x \neq y\,.$$
Se f è lipschitziana, allora l'estremo superiore
$$L(f) = \sup_{\substack{x,y \in I \\ x \neq y}} \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right|,$$
cioè la più piccola costante L con $|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$ per tutti i $x\,, y \in I$, si chiama *la costante di Lipschitz* di f.

Una funzione lipschitziana f è uniformamente continua: per ogni $\varepsilon > 0$ la δ nella definizione della continuità uniforma può essere scelta esplicitamente $\delta = \dfrac{\varepsilon}{L}$.

Se I è un intervallo non degenere, cioè con $a(I) < b(I)$, allora una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ e lipschitziana se e solo se la sua restrizione all'interno $\big(a(I)\,, b(I)\big)$ di I è lipschitziana e allora $L(F)$ è uguale alla costante di Lipschitz della restrizione di F a $\big(a(I)\,, b(I)\big)$.

$\to$ *Una funzione derivabile $f : (a\,, b) \to \mathbb{R}$ è lipschitziana se e solo se la sua derivata f' è limitata e allora*
$$L(f) = \sup_{x \in (a,b)} |f'(x)|\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che
$$M = \sup_{x \in (a,b)} |f'(x)| < +\infty\,.$$
Per ogni $a < x < y < b$ il teorema del valor medio di Lagrange ci garantisce l'esistenza di un $x < \xi < y$ tale che $f(y) - f(x) = f'(\xi)\,(y - x)$ e risulta

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = \left|f'(\xi)\right| \le M\,.$$

Perciò f è lipschitziana e $L(f) \le M$.

Supponiamo adesso che f è lipschitziana. Allora, per ogni $x \in (a,b)$,

$$\left|f'(x)\right| = \lim_{x\neq y\to x}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \le L(F)\,.$$

Risulta che f' è limitata e $\sup\limits_{x\in(a,b)} |f'(x)| \le L(f)$.

Esempi:

La funzione sin definita sull'intera retta è lipschitziana e la sua costante di Lipschitz è 1: la sua derivata $(\sin x)' = \cos x$ è limitata e il massimo di $|\cos x|$ è 1 .

La funzione $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x\log x$ non è lipschitziana: infatti, è derivabile e la sua derivata $f'(x)=\log x+1$ non è limitata. Però, siccome il limite

$$\lim_{0<x\to 0} f(x) = \lim_{0<x\to 0} x\log x = 0$$

esiste ed è finito, f è uniformamente continua.

Anche la lipschitzianità si può verificare su pezzi del dominio:

→ *Supponiamo che l'intervallo I è l'unione di due intervalli I_1, I_2 . Allora una funzione $f:I\to\mathbb{R}$, che è lipschitziana sia su I_1 che su I_2 , sarà lipschitziana su tutto I . Per di più, $L(f)$ è la più grande delle costanti di Lipschitz delle due restrizioni.*

Dimostrazione. Si imita la dimostrazione del risultato analogo per la continuità uniforma.

Sulla convergenza degli integrali impropri:

Siano $-\infty < a < b < +\infty$ e sia la funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile (secondo Riemann). Allora le funzioni

$$[a,b] \ni b' \longmapsto \int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$$[a,b] \ni a' \longmapsto \int_{a'}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{a'} f(x)\,\mathrm{d}x$$

sono continue (addirittura lipschitziane !), perciò

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b>b'\to b} \int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a<a'\to a} \int_{a'}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Se scegliamo un $x_o \in (a,b)$ ed applichiamo le identità precedenti alle restrizioni di f su $[a,x_o]$ rispettivamente $[x_o,b]$, otteniamo anche

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{x_o} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_o}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a<a'\to a} \int_{a'}^{x_o} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b>b'\to b} \int_{x_o}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\substack{a<a'\to a \\ b>b'\to b}} \left(\int_{a'}^{x_o} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_o}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{\substack{a<a'\to a \\ b>b'\to b}} \int_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Ma anche se f fosse definita solo su $[a,b)$ (nel quale caso possiamo avere anche $b=+\infty$), può accadere che f sia integrabile su ogni intervallo $[a,b']$, $a<b'<b$, ed esisti il limite

$$\lim_{b>b'\to b} \int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}\,.$$

In questo caso parliamo dell'*integrale improprio*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b>b'\to b} \int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x$$

di f su $[a,b)$.

Similmente, se f è definita su $(a,b]$ (quando anche $a=-\infty$ è possibile), è integrabile su ogni $[a',b]$, $a<a'<b$, ed esiste il limite

$$\lim_{a<a'\to a} \int_{a'}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}\,,$$

allora parliamo dell'*integrale improprio*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{a<a'\to a} \int_{a'}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

di f su $(a,b]$.

! Più generale, supponiamo che $-\infty \le a < b \le +\infty$ e sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una funzione tale che, per ogni $a<a'<b'<b$, la restrizione di f su $[a',b']$ è integrabile (secondo Riemann). Chiaramente, se f è continua o monotona, allora la condizione precedente di integrabilità su tutti gli intervalli compatti $[a',b']\subset(a,b)$ è soddisfatta.

Se esiste il limite

$$\lim_{\substack{a<a'\to a\\ b>b'\to b}} \int_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x \in [-\infty,+\infty]$$

allora diciamo che esiste *l'integrale improprio*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\substack{a<a'\to a\\ b>b'\to b}} \int_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Se l'integrale proprio $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ esiste ed è finito, cioè se

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}\,,$$

allora diciamo che l'integrale proprio *converge.* Se invece l'integrale proprio $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ esiste e non è finito, cioè se

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty \quad \text{o} \quad \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\infty\,,$$

allora diciamo che l'integrale proprio *diverge.*

Se $f \geq 0$ l'integrale improprio esiste sempre:

→ *Sia* $f : (a,b) \to [0,+\infty)$ *integrabile su ogni intervallo* $[a',b'] \subset (a,b)$. *Allora esiste l'integrale improprio*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a<a'\to a\\ b>b'\to b}} \int\limits_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_{a<a'<b'<b} \int\limits_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x \in [0,+\infty]\,.$$

In particolare, $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *converge se e solo se esiste una costante* $C \geq 0$ *tale che*

$$\int\limits_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x \leq C \quad \textit{per ogni} \quad a < a' < b' < b\,.$$

Dimostrazione. Indichiamo

$$I = \sup_{a<a'<b'<b} \int\limits_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x \in [0,+\infty]\,.$$

Sia $I' < I$ arbitrario. Allora, secondo la definizione dell'estremo superiore, esistono $a < a_o < b_o < b$ con

$$\int_{a_o}^{b_o} f(x)\,\mathrm{d}x > I'$$

e per la positività di f risulta

$$a < a' < a_o\,,\ b_o < b' < b \implies I' < \int_{a_o}^{b_o} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x \leq I.$$

Cosicché

$$\lim_{\substack{a<a'\to a\\ b>b'\to b}} \int_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x = I\,.$$

Ne risulta il *criterio del confronto* per la convergenza degli integrali impropri :

→ *Siano* $f, g : (a,b) \to [0,+\infty)$ *funzioni integrabili su ogni* $[a',b'] \subset (a,b)$. *Se*

$$0 \leq f(x) \leq g(x)\,, \qquad a < x < b\,,$$

allora

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{converge} \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{converge}\,,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{diverge} \implies \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{diverge}\,.$$

Una forma particolare utile del criterio del confronto è il *criterio del confronto asintotico* :

→ *Per* $-\infty < a < b \leq +\infty$ *siano* $f, g : [a,b) \to (0,+\infty)$ *due funzioni integrabili su ogni intervallo* $[a,b']$ *con* $a < b' < b$. *Supponiamo inoltre che esista il limite*

$$L = \lim_{b>x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} \in [0,+\infty]\,.$$

Allora

$$L < +\infty\,,\ \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{converge} \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{converge}\,,$$

$$L > 0\,, \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\; \textit{converge} \implies \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \;\; \textit{converge}\,.$$

In particolare, se $0 < L < +\infty$ *(cioè se* f *e* g *sono asintoticamente equivalenti in* b *) allora*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\; \textit{converge} \iff \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \;\; \textit{converge}\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo prima che $L < +\infty$ e che l'integrale improprio $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Scegliamo un $L < L'' < +\infty$. Allora esiste un $a < b_o < b$ tale che

$$b_o \le x < b \implies \frac{f(x)}{g(x)} < L'' \;\text{ cioè }\; f(x) < L''\,g(x)$$

e dal criterio del confronto risulta la convergenza dell'integrale improprio $\int_{b_o}^b f(x)\,\mathrm{d}x$, quindi anche di $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Se invece $L > 0$, allora

$$\lim_{b>x\to b} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{L} < +\infty$$

e secondo l'implicazione già dimostrata qui sopra abbiamo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\text{ converge} \implies \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \;\text{ converge.}$$

Similmente si verifica :

$\rightarrow$ *Per* $-\infty \le a < b < +\infty$ *siano* $f, g : (a, b] \to (0, +\infty)$ *due funzioni integrabili su ogni intervallo* $[a', b]$ *con* $a < a' < b$ *. Supponiamo inoltre che esista il limite*

$$L = \lim_{a<x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \in [0, +\infty]\,.$$

Allora

$$L < +\infty\,,\ \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ \ \textit{converge} \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ \ \textit{converge}\,,$$

$$L > 0\,,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ \ \textit{converge} \implies \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ \ \textit{converge}\,.$$

In particolare, se $0 < L < +\infty$ (*cioè se* f *e* g *sono asintoticamente equivalenti in* a) *allora*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ \ \textit{converge} \iff \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ \ \textit{converge}\,.$$

Esempi:

! *L'integrale improprio* $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^d \mathrm{d}x$ *converge se e solo se* $d < -1$ (*in altre parole,* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^c}\,\mathrm{d}x$ *converge se e solo se* $c > 1$).

Infatti, se $d \neq -1$, cioè $d + 1 \neq 0$, allora

$$\int_1^{+\infty} x^d \mathrm{d}x = \lim_{b' \to +\infty} \int_1^{b'} x^d \mathrm{d}x = \lim_{b' \to +\infty} \frac{1}{d+1}\Big((b')^{d+1} - 1\Big)$$

è finito esattamente quando $d + 1 < 0$, cioè $d < -1$. D'altro canto, per $d = 1$ abbiamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b' \to +\infty} \int_1^{b'} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b' \to +\infty} \log b' = +\infty\,.$$

Similmente si dimostra :

! *L'integrale improprio* $\displaystyle\int_0^{1} x^d \mathrm{d}x$ *converge se e solo se* $d > -1$ (*in altre* *parole,* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^c}\,\mathrm{d}x$ *converge se e solo se* $c < 1$).

Vediamo ora :

! *Per che valori del parametro reale* α *converge l'integrale improprio*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad ?$$

L'integrale è improprio sia in 0 che all'infinito. Esaminiamo prima la convergenza in 0, cioè la convergenza degli integrali del tipo

$$\int_0^a \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

ove $a > 0$. Ovviamente, la convergenza di quest'integrale per un $a_o > 0$ implica la sua convergenza per ogni $a > 0$. Basta perciò considerare (per esempio) il caso $a = 1$.

Ora le funzioni $\dfrac{x^\alpha}{1+x^2}$ e x^α sono asintoticamente equivalenti in 0:

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{\dfrac{x^\alpha}{1+x^2}}{x^\alpha} = \lim_{0<x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1\,.$$

Perciò

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \ \text{converge} \iff \int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x \ \text{converge} \iff \alpha > -1\,.$$

Esaminiamo adesso la convergenza del nostro integtrale all'infinito, cioè la convergenza di

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

A questa fine vediamo, che potenza di x è asintoticamente equivalente con $\dfrac{x^\alpha}{1+x^2}$ in $+\infty$, cioè per che valore $\beta \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^\alpha}{1+x^2}}{x^\beta}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-\beta}}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-\beta-2}}{\dfrac{1}{x^2}+1}=\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha-\beta-2}$$

è finito e nonzero. Ma questo accade esattamente quando $\alpha-\beta-2=0$, ossia $\beta=\alpha-2$. Di conseguenza le funzioni $\dfrac{x^\alpha}{1+x^2}$ e $x^{\alpha-2}$ sono asintoticamente equivalenti in $+\infty$. Risulta

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge } \iff \int_1^{+\infty}x^{\alpha-2}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge } \iff \alpha-2<-1\,,$$

cioè

$$\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge } \iff \alpha<1\,.$$

Concludiamo che

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge}\\
\iff &\int_0^{1}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \ \text{ e } \int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \ \text{ convergono}\\
\iff &\alpha>-1 \ \text{ e } \ \alpha<1\\
\iff &-1<\alpha<1\,.
\end{aligned}$$

Soluzioni:

1) **:** Il dominio di f è l'intervallo $(0,+\infty)$. f è derivabile e la sua derivata

$$f'(x) = \frac{1}{1+\log^2 x} \cdot \frac{1}{x}$$

è limitata su ogni intervallo della forma $(a,+\infty)$ con $a > 0$, ma non su $(0,+\infty)$. Risulta che gli intervalli in cui f è lipschitziana sono

$$(a,+\infty)\,, \qquad a > 0\,.$$

D'altro canto, poiché f è continua ed esistono i limiti finiti

$$\lim_{0<x\to 0} f(x) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}\,, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}\,,$$

f è uniformamente continua in tutto il suo dominio.

2) **:** La formula di Taylor con il resto di Peano, applicata alla funzione sin, ci da

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \ \text{ per } \ x \to 0\,.$$

Ricordiamo le seguenti regole di calcolo con "o piccoli" per $x \to 0$:

$$\begin{gathered} o(x^n) + o(x^m) = o(x^n) \ \text{ se } \ n \leq m\,; \\ \lambda \cdot o(x^n) = o(x^n) \ \text{ se } \ 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}\,; \\ x^m = o(x^{m-1})\,; \\ x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})\,; \\ o(x^m)\cdot o(x^n) = o(x^{m+n})\,. \end{gathered}$$

Applicandole otteniamo che

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \Big(x - \frac{x^3}{6}\Big)^3 + \underbrace{3\Big(x-\frac{x^3}{6}\Big)^2 o(x^4)}_{=o(x^6)} + \underbrace{3\Big(x-\frac{x^3}{6}\Big)o(x^4)^2}_{=o(x^9)} + \underbrace{o(x^4)^3}_{=o(x^{12})} \\ &= x^3 - 3x^2\frac{x^3}{6} + 3x\Big(\frac{x^3}{6}\Big)^2 - \Big(\frac{x^3}{6}\Big)^3 + o(x^6) \\ &= x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{12} - \frac{x^9}{216} + o(x^6) \\ &= x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^6) \end{aligned}$$

per $x \to 0$.

Ora

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(\sin x)^3}\right) \operatorname{tg} x &= \frac{(\sin x)^3 - x^3}{x^3 (\sin x)^3} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \frac{(\sin x)^3 - x^3}{x^5} \cdot \frac{x^2}{(\sin x)^2} \cdot \frac{1}{\cos x} \\
&= \frac{-\dfrac{x^5}{2} + o(x^6)}{x^5} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos x} \\
&= \left(- \frac{1}{2} + o(x)\right) \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos x}
\end{aligned}$$

implica

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(\sin x)^3}\right) \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}\ .$$

3) : Usando la sostituzione $u = \cos x$ e, poi, integrazione per parti, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\sin x}_{-(\cos x)'} \cdot \operatorname{arctg}(\cos x)\, \mathrm{d}x &= -\int \operatorname{arctg} u \, \mathrm{d}u \\
&= -\, u \cdot \operatorname{arctg} u + \int u \cdot \frac{1}{1+u^2}\, \mathrm{d}u \\
&= -\, u \cdot \operatorname{arctg} u + \frac{1}{2} \int \frac{(1+u^2)'}{1+u^2}\, \mathrm{d}u \\
&= -\, u \cdot \operatorname{arctg} u + \frac{1}{2} \log(1+u^2) + C \\
&= -\cos x \cdot \operatorname{arctg}(\cos x) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2} \log(1 + \cos^2 x) + C\,.
\end{aligned}$$

4) : Per $\alpha \neq -1$ otteniamo tramite integrazione per parti

$$\begin{aligned}
-\int_0^1 x^\alpha \log x \, \mathrm{d}x &= \lim_{0<a\to 0} -\int_a^1 x^\alpha \log x \, \mathrm{d}x \\
&= \lim_{0<a\to 0} \left(-\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \log x \Big|_a^1 + \int_a^1 \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \right)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{0<a\to 0}\left(\frac{a^{\alpha+1}\log a}{\alpha+1}+\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\Bigg|_a^1\right)$$
$$= \lim_{0<a\to 0}\left(\frac{a^{\alpha+1}\log a}{\alpha+1}+\frac{1}{(\alpha+1)^2}-\frac{a^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\right).$$

Poiché

$$\lim_{0<a\to 0} a^\beta = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta>0 \\ 1 & \text{se } \beta=0 \\ +\infty & \text{se } \beta<0 \end{cases}, \quad \lim_{0<a\to 0} a^\beta\log a = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta>0 \\ -\infty & \text{se } \beta\le 0 \end{cases},$$

per $\alpha+1>0$, cioè $\alpha>-1$, l'integrale

$$\int_0^1 x^\alpha \log\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^\alpha\log x\,\mathrm{d}x$$

converge ed è uguale a

$$\frac{1}{(\alpha+1)^2}.$$

D'altro canto, per $\alpha\le -1$ l'integrale diverge. Infatti, poiché

$$0\le x^\alpha\le x^\alpha\log\frac{1}{x} \quad \text{per} \quad 0<x\le\frac{1}{e}$$

e $\displaystyle\int_0^{1/e} x^\alpha\,\mathrm{d}x$ diverge, il criterio del confronto implica la divergenza di $\displaystyle\int_0^{1/e} x^\alpha\log\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, quindi anche di $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha\log\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

5) **:** Indichiamo per convenienza $a_n=\dfrac{n!}{n^n}x^n$ ed applichiamo il criterio del rapporto alla serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty |a_n|$:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}|x|^{n+1}}{\dfrac{n!}{n^n}|x|^n}=\frac{n^n|x|}{(n+1)^n}=\frac{|x|}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}\searrow\frac{|x|}{e}$$

implica che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\frac{n!}{n^n}x^n$ è assolutamente convergente per $|x|<e$.

Se invece $|x| \geq e$, allora

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \searrow \frac{|x|}{e} \geq 1$$

implica che

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1 \quad \text{cioè} \quad |a_{n+1}| \geq |a_n|$$

per ogni $n \geq 1$. Cosicché la successione crescente

$$\Big(e \leq |x| = \Big)\ |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \ ...$$

non può convergere a 0, quindi $a_n \nrightarrow 0$ e risulta che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, x^n$ non è convergente.

Concludiamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, x^n$ converge se e soltanto se $|x| < e$.
Per di più, quando converge, converge anche assolutamente.