NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2013/2014
Analisi Reale e Complessa, Test del 17.11.2014

1) Sia $E_k\,, k \geq 1\,$, una successione di insiemi misurabili in $\mathbb{R}^n$ tale che l'insieme $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{k\geq 1} E_k$ sia di misura zero. Indichiamo la funzione caratteristiica di E_k con χ_{E_k}.

Si verifichi che una applicazione $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ è misurabile se e soltanto se tutte le applicazioni $\chi_{E_k} F\,, k \geq 1\,$, sono misurabili.

2) Siano

$$K_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,; 0 \leq x \leq 1\,,\ x^2 \leq y \leq \ \ 1 \right\},$$
$$K_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,; 0 \leq x \leq 1\,, -1 \leq y \leq -x^2 \right\}.$$

e definiamo su

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,; 0 \leq x \leq 1\,,\ x^2 \leq |y| \leq 1 \right\} = K_1 \cup K_2$$

la funzione g tramite la formula

$$g(x\,,y) := \begin{cases} \ \ \sqrt{x^2+y^2} & \text{per } y \geq 0 \\ -\sqrt{x^2+y^2} & \text{per } y \leq 0 \end{cases}.$$

Si verifichi che le restrizioni di g su K_1 e su K_2 sono di Lipschitz, mentre g non è di Lipschitz.

3) Sia $E \subset [0\,,+\infty)$ un insieme misurabile.

(i) Si verifichi che la funzione $[0\,,+\infty) \ni x \longmapsto \big|[0\,,x\,] \cap E\big| \in [0\,,+\infty)$ è continua.

(ii) Si deduca che per ogni $0 \leq \alpha < |E|$ esiste un sottoinsieme misurabile E_α di E tale che $|E_\alpha| = \alpha$.

4) Per $b > 0$ reale consideriamo la funzione $f : (0\,,b\,] \times (0\,,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita dalla formula

$$f(x\,,y) := e^{-xy} \sin x\,, \qquad (x\,,y) \in (0\,,b\,] \times (0\,,+\infty)\,.$$

a) Si verifichi che la funzione f è sommabile.

b) Applicando il teorema di Fubini ad f si deduca la formula

$$\int\limits_0^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-by}}{1+y^2}\big(\cos b + y \sin b\big)\mathrm{d}y\,.$$

c) Si verifichi la convergenza

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-by}}{1+y^2}\big(\cos b + y \sin b\big)\mathrm{d}y = 0$$

usando il teorema della convergenza dominata.

Soluzioni:

1) : **Soluzione "insiemistica".**

Se F è misurabile, allora per ogni aperto $U \subset \mathbb{R}^k$ la controimmagine

$$\big(\chi_{E_k} F\big)^{-1}(U) = \begin{cases} E_k \cap F^{-1}(U) & \text{se } \vec{0} \notin U\,, \\ \big(E_k \cap F^{-1}(U)\big) \cup \big(\mathbb{R}^p \setminus E_k\big) & \text{se } \vec{0} \in U \end{cases}$$

è misurabile.

Supponiamo adesso che le applicazioni $\chi_{E_k} F\,, k \geq 1\,,$ sono misurabili ed $U \subset \mathbb{R}^p$ è un aperto qualsiasi. Allora

$$F^{-1}(U) = \Big(\big(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k\geq 1} E_k\big) \cap F^{-1}(U)\Big) \cup \bigcup_{k\geq 1} \Big(E_k \cap F^{-1}(U)\Big)$$

dove $\big(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{k\geq 1} E_k\big) \cap F^{-1}(U)$ è misurabile perché

$$\Big|\big(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k\geq 1} E_k\big) \cap F^{-1}(U)\Big|_e \leq \big|\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k\geq 1} E_k\big| = 0$$

e gli insiemi $E_k \cap F^{-1}(U)$ sono misurabili perché

$$E_k \cap F^{-1}(U) = E_k \cap \big(\chi_{E_k} F\big)^{-1}(U)$$

e la funzione $\chi_{E_k} F$ è misurabile. Di conseguenza $F^{-1}(U)$ è misurabile quale unione numerabile di insiemi misurabili.

Soluzione "funzionistica".

Ricordiamo che una applicazione $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ significa p funzioni scalari, i componenti

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_p \end{pmatrix},$$

ed F è misurabile se e soltanto se tutte le funzioni $F_1\,, \dots, F_p$ sono misurabili. Risulta che

- se F e $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sono misurabili allora anche il prodotto gF è misurabile,

- la somma di un numero finito di applicazioni misurabili $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ è pure misurabile,
- F è misurabile se è limite puntuale di una successione di applicazioni misurabili $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$.

Ora la misurabilità degli insiemi E_k è echivalente con la misurabilità delle funzioni caratteristiche χ_{E_k} e così se F è misurabile, allora tutti i prodotti $\chi_{E_k}F$ sono misurabili.

Supponiamo adesso che tutte le applicazioni $\chi_{E_k}F$ sono misurabili. Qualsiasi sottoinsieme $S \subset N := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{k\geq 1} E_k$ è di misura zero, perciò l'applicazione $\chi_S F$ è quasi ovunque uguale $\overrightarrow{0} \in \mathbb{R}^p$, quindi misurabile. Di conseguenza tutte le applicazioni $\chi_{E_k \cup N}F = \chi_{E_k}F + \chi_{N\setminus E_k}F$ sono misurabili. Se F fosse limite puntuale della successione $\big(\chi_{E_k\cup N}F\big)_{k\geq 1}$ allora risulterebbe misurabile, ma in generale non è così.

Possiamo però "correggere" gli insiemi $E_k \cup N$ tale che la successione degli insiemi modificati diventi crescente. Definiamo

$$E_k' := \bigcup_{j=1}^{k} (E_k \cup N)\,, \qquad k \geq 1\,.$$

Allora $\big(E_k'\big)_{k\geq 1}$ è una successione crescente di insiemi misurabili con $\bigcup\limits_{k\geq 1} E_k' = N \cup \bigcup\limits_{k\geq 1} E_k = \mathbb{R}^n$. Perciò $\lim\limits_{k\to\infty} \chi_{E_k'}F = F$ puntualmente e resta solo da mostrare la misurabilità delle applicazioni $\chi_{E_k'}F$.

Useremo induzione su k.

La misurabilità di $\chi_{E_1'}F$ è già verificata. Supponiamo adesso che $\chi_{E_k'}F$ è misurabile. Poiché

$$\begin{aligned}\chi_{E_{k+1}'}F &= \chi_{E_k'}F + \chi_{(E_{k+1}\cup N)\setminus E_k'}F \\ &= \chi_{E_k'}F + \big(\chi_{\mathbb{R}^n\setminus E_k'}\big)\cdot\big(\chi_{E_{k+1}\cup N}F\big),\end{aligned}$$

dove anche $\chi_{E_{k+1}\cup N}F$ e $\chi_{\mathbb{R}^n\setminus E_k'}$ sono misurabili, risulta la misurabilità di $\chi_{E_{k+1}'}F$.

2) : Per $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K_1$ abbiamo $g(x\,,y) = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$, perciò la disuguaglianza

triangolare implica per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in K_1$:

$$\big| g(x\,,y) - g(x'\,,y') \big| = \left| \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| - \left\| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\| \right| \leq \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\| .$$

Cosicché la restrizione di g su K_1 è di Lipschitz (con una costante di Lipschitz uguale ad 1).

Similmente si verifica che anche la restrizione di g su K_2 è di Lipschitz.

Per verificare che g non è di Lipschitz, proviamo (secondo l'ispirazione ottenuta da un disegno) che

$$\sup_{0<x\leq 1} \frac{\big| g(x\,,x^2) - g(x\,,-x^2) \big|}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ -x^2 \end{pmatrix} \right\|} = +\infty \, .$$

Infatti, il rapporto

$$\frac{\big| g(x\,,x^2) - g(x\,,-x^2) \big|}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ -x^2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{2\sqrt{x^2 + x^4}}{2\,x^2} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}$$

ha limite $+\infty$ per $0 < x \to 0$.

Generalizzazione.

Siano $f_1, f_2 : [\,0,1\,] \longrightarrow [\,0,1\,]$ funzioni crescenti con $f_1(0) = f_2(0) = 0$ e $f_1(x), f_2(0) > 0$ per $x > 0$. Consideriamo gli insiemi

$$K_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,; 0 \leq x \leq 1 \,,\, f_1(x) \leq y \leq \quad 1 \qquad \right\} ,$$
$$K_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,; 0 \leq x \leq 1 \,, \quad -1 \quad \leq y \leq -\, f_2(x) \right\}$$

e siano $g_1 : K_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_2 : K_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni di Lipschitz, con costante di Lipschitz L_1 rispettivamente L_2 , che prendono lo stesso valore in $\vec{0}$. Poniamo la domanda: che condizione devono soddisfare f_1, f_2 e g_1, g_2 perché la funzione $g : K_1 \cup K_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(x\,,y) := \begin{cases} g_1(x\,,y) & \text{per } y \geq 0 \\ g_2(x\,,y) & \text{per } y \leq 0 \end{cases} .$$

sia di Lipschitz?

Poiché

$$\frac{\bigl|g_1\bigl(x\,,f_1(x)\bigr)-g_2\bigl(x\,,-f_2(x)\bigr)\bigr|}{\left\|\begin{pmatrix} x \\ f_1(x)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x \\ -f_2(x)\end{pmatrix}\right\|}=\frac{\bigl|g_1\bigl(x\,,f_1(x)\bigr)-g_2\bigl(x\,,-f_2(x)\bigr)\bigr|}{f_1(x)+f_2(x)}\,,$$

la condizione

$$L_0:=\sup_{0<x\le 1}\frac{\bigl|g_1\bigl(x\,,f_1(x)\bigr)-g_2\bigl(x\,,-f_2(x)\bigr)\bigr|}{f_1(x)+f_2(x)}<+\infty \qquad (*)$$

è necessaria. Mostriamo che questa conditione è anche sufficiente.

Abbiamo da mostrare che (*) implica l'esistenza di una costante $L\ge 0$ tale che, per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}$ in $K_1\cup K_2$, sia verificata

$$\bigl|g\bigl(x\,,y\bigr)-g\bigl(x'\,,y'\bigr)\bigr|\le L\left\|\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}\right\|. \qquad (**)$$

Scegliendo $L\ge\max\left(L_1\,,L_2\right)$, la disuguaglianza (**) sarà verificata se $\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix},\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}\in K_1$ oppure $\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix},\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}\in K_2$.

Sia adesso $\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\in K_1$ e $\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}\in K_2$ e supponiamo, per esempio, che $x\le x'$. Poiché $\begin{pmatrix} x \\ f_1(x)\end{pmatrix}\in K_1$ e $\begin{pmatrix} x \\ -f_2(x)\end{pmatrix}\in K_2$, risulta (è opportuno seguire tutte le stime seguenti su un disegno!)

$$\begin{aligned}
&\bigl|g\bigl(x\,,y\bigr)-g\bigl(x'\,,y'\bigr)\bigr| \\
&\le\bigl|g_1\bigl(x\,,y\bigr)-g_1\bigl(x\,,f_1(x)\bigr)\bigr|+\bigl|g_1\bigl(x\,,f_1(x)\bigr)-g_2\bigl(x\,,-f_2(x)\bigr)\bigr| \\
&\qquad\qquad+\bigl|g_2\bigl(x\,,-f_2(x)\bigr)-g_2\bigl(x'\,,y'\bigr)\bigr| \\
&\le L_1\left\|\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x \\ f_1(x)\end{pmatrix}\right\|+L_0\bigl(f_1(x)+f_2(x)\bigr) \\
&\qquad\qquad+L_2\left\|\begin{pmatrix} x \\ -f_2(x)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x' \\ y'\end{pmatrix}\right\|
\end{aligned}$$

$$\le L_1\big(y - f_1(x)\big) + L_0\big(f_1(x) + f_2(x)\big) + L_2\sqrt{(x'-x)^2 + \big(y' + f_2(x)\big)^2}$$
$$\le L'\Big(y - f_1(x) + f_1(x) + f_2(x) + \sqrt{(x'-x)^2 + \big(y' + f_2(x)\big)^2}\Big)$$
$$= L'\Big(y + f_2(x) + \sqrt{(x'-x)^2 + \big(y' + f_2(x)\big)^2}\Big)$$

dove $L' := \max(L_0\,, L_1\,, L_2)$. Ma f_2 essendo crescente, abbiamo

$$y + f_2(x) \le y + f_2(x') \le y - y' \le \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\|$$

e

$$\begin{aligned} & y' + f_2(x) \le y' + f_2(x') \le 0 \\ \Longrightarrow\ & \big|y' + f_2(x)\big| = -y' - f_2(x) \le -y' \le y - y'\,, \end{aligned}$$

quindi

$$\sqrt{(x'-x)^2 + \big(y' + f_2(x)\big)^2} \le \sqrt{(x'-x)^2 + (y-y')^2} \le \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\|,$$

Di conseguenza

$$\big|g(x\,,y) - g(x'\,,y')\big| \le 2\,L' \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\|.$$

Concludiamo che (**) è verificata per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ in $K_1 \cup K_2$ con $L = 2\,L' = 2\max(L_0\,, L_1\,, L_2)$.

Nel caso del compito 2) abbiamo

$$\begin{gathered} f_1(x) = f_2(x) = x^2\,, \\ g_1(x\,,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,,\ g_2(x\,,y) = -\sqrt{x^2+y^2} \end{gathered}$$

e (*) non è verificata :

$$\frac{\big|g_1\big(x\,, f_1(x)\big) - g_2\big(x\,, -f_2(x)\big)\big|}{f_1(x) + f_2(x)} = \frac{2\sqrt{x^2+x^4}}{2\,x^2} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}$$

tende a $+\infty$ per $0 < x \to 0$.

3) : (i) Usando l'additività della misura di Lebesgue otteniamo per ogni $x_1 \geq x_2$ in $[0\,,+\infty)$

$$\begin{aligned} 0 \leq \big|[0\,,x_1\,] \cap E\big| - \big|[0\,,x_2\,] \cap E\big| &= \big|\big([0\,,x_1\,] \cap E\big) \setminus \big([0\,,x_2\,] \cap E\big)\big| \\ &= \big|(x_2\,,x_1\,] \cap E\big| \\ &\leq \big|(x_2\,,x_1\,]\big| = x_1 - x_2\,. \end{aligned}$$

Cosicché

$$\Big|\big|[0\,,x_1\,] \cap E\big| - \big|[0\,,x_2\,] \cap E\big|\Big| \leq |x_1 - x_2|\,, \qquad x_1\,,x_2 \in [0\,,+\infty)$$

e concludiamo che la funzione $[0\,,+\infty) \ni x \longmapsto \big|[0\,,x\,] \cap E\big| \in [0\,,+\infty)$ è di Lipschitz (con costante di Lipschitz 1). In particolare risulta la sua continuità.

(ii) Per la continuità monotona crescente della misura di Lebesgue

$$\lim_{0 \leq x \to +\infty} \big|[0\,,x\,] \cap E\big| = \Bigg|\underbrace{\Bigg(\bigcup_{x \geq 1} [0\,,x\,]\Bigg)}_{=[0\,,+\infty)} \cap E\Bigg| = |E|\,,$$

quindi secondo il teorema del valor intermedio la funzione continua

$$[0\,,+\infty) \ni x \longmapsto \big|[0\,,x\,] \cap E\big| \in [0\,,+\infty)$$

assume ogni valore contenuto in $\big[|[0\,,0\,] \cap E|\,,|E|\big) = \big[0\,,|E|\big)$. In altre parole, per ogni $0 \leq \alpha < |E|$ esiste un $x_\alpha \geq 0$ con $\big|[0\,,x_\alpha\,] \cap E\big| = \alpha\,$. Allora $E_\alpha := [0\,,x_\alpha\,] \cap E$ sarà un sottoinsieme misurabile di E tale che $\big|E_\alpha\big| = \alpha\,$.

4) : a) La funzione f è continua, quindi misurabile. Per la sua somabilità dobbiamo verificare che il suo modulo ha integrale finito. Ma

$$|f(x\,,y)| = \big|e^{-xy} \sin x\big| \leq x\,e^{-xy}\,, \qquad (x\,,y) \in (0\,,b\,] \times (0\,,+\infty)$$

dove la funzione continia

$$(0\,,b\,] \times (0\,,+\infty) \ni (x\,,y) \longmapsto x\,e^{-xy} \in (0\,,+\infty)$$

ha integrale finito: infatti, usando il teorema di Tonelli otteniamo

$$\int\limits_{(0\,,b]\times(0\,,+\infty)} x\,e^{-xy}\,\mathrm{d}(x\,,y) = \int\limits_0^b \Bigg(\underbrace{\int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-xy}\,\mathrm{d}y}_{=1}\Bigg)\mathrm{d}x = b\,.$$

Di conseguenza

$$\int\limits_{(0\,,b]\times(0\,,+\infty)} |f(x\,,y)|\,\mathrm{d}(x\,,y) \leq \int\limits_{(0\,,b]\times(0\,,+\infty)} x\,e^{-xy}\,\mathrm{d}(x\,,y) = b < +\infty\,.$$

b) Applicando il teorema di Fubini ad f si ottiene

$$\begin{aligned}\int\limits_0^b \Bigg(\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}y \Bigg)\mathrm{d}x &= \int\limits_{(0\,,b]\times(0\,,+\infty)} e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}(x\,,y) \\ &= \int\limits_0^{+\infty} \Bigg(\int\limits_0^b e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x \Bigg)\mathrm{d}y\,.\end{aligned} \tag{1}$$

Poiché

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}y = \frac{\sin x}{x} \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-xy}\,\mathrm{d}y}_{=\,1} = \frac{\sin x}{x}\,, \qquad x > 0\,,$$

la parte sinistra in (1) è uguale a

$$\int\limits_0^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

D'altro canto è noto che

$$\int e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x = -\,\frac{e^{-xy}}{1+y^2}\big(\cos x + y\sin x\big)\ :$$

Infatti, integrando due volte per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int e^{-xy}\underbrace{\sin x\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}(-\,\cos x)} &= -\,e^{-xy}\cos x - y\int e^{-xy}\underbrace{\cos x\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}(\sin x)} \\ &= -\,e^{-xy}\cos x - y\,e^{-xy}\sin x - y^2\int e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

cioè

$$(1+y^2)\int e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x = -\,e^{-xy}\cos x - y\,e^{-xy}\sin x\,.$$

Risulta

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x &= -\frac{e^{-xy}}{1+y^2}\big(\cos x+y\sin x\big)\Big|_{x=0}^{x=b}\\ &= \frac{1}{1+y^2}-\frac{e^{-xy}}{1+y^2}\big(\cos b+y\sin b\big)\end{aligned}$$

e quindi la parte destra in (1) è uguale a

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+y^2}-\frac{e^{-xy}}{1+y^2}\big(\cos b+y\sin b\big)\right)\mathrm{d}y\\ &=\frac{\pi}{2}-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-by}}{1+y^2}\big(\cos b+y\sin b\big)\mathrm{d}y\,.\end{aligned}$$

Pertanto (1) implica l'uguaglianza desiderata

$$\int_0^b\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-by}}{1+y^2}\big(\cos b+y\sin b\big)\mathrm{d}y\,.$$

c) Dobbiamo verificare che per ogni successione $0<b_k\longrightarrow+\infty$

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-b_k y}}{1+y^2}\big(\cos b_k+y\sin b_k\big)\mathrm{d}y\longrightarrow 0\,.$$

Eliminando, se necessario, un numero finito di b_k, possiamo assumere senza minore generalità che $b_k\geq 1$ per ogni $k\geq 1$.

La successione delle funzioni

$$g_k:(0\,,+\infty)\ni y\longmapsto\frac{e^{-b_k y}}{1+y^2}\big(\cos b_k+y\sin b_k\big)\in\mathbb{R}\,,\qquad k\geq 1$$

converge puntualmente a 0:

$$|\,g_k(y)|=\left|\frac{e^{-b_k y}}{1+y^2}\big(\cos b_k+y\sin b_k\big)\right|\leq\frac{1+y}{1+y^2}\,e^{-b_k y}\longrightarrow 0\,,\qquad y>0\,.$$

D'altro canto, tenendo conto che $b_k\geq 1$ per ogni $k\geq 1$, abbiamo la maggiorazione uniforme

$$|\, g_k(y)| \leq \frac{1+y}{1+y^2}\, e^{-b_k y} \leq 2\, e^{-y}\,, \qquad y > 0\,, k \geq 1$$

dove la funzione positiva $(\,0\,,+\infty)\ni y \longmapsto e^{-y}$ è sommabile. Perciò si può applicare il teorema della convergenza dominata ottenendo

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-b_k y}}{1+y^2}\big(\cos b_k + y \sin b_k\big)\mathrm{d}y &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} g_k(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_0^{+\infty} \Big(\lim_{k\to\infty} g_k(y)\Big)\mathrm{d}y = 0\,.\end{aligned}$$

Osservazione.

Nel compito 4) abbiamo sostanzialmente calcolato l'integrale improprio di $\dfrac{\sin x}{x}$ da 0 a $+\infty$:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &:= \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to+\infty} \bigg(\frac{\pi}{2} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-by}}{1+y^2}\big(\cos b + y \sin b\big)\mathrm{d}y\bigg) \\ &= \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Rimarchiamo che la funzione continua

$$(\,0\,,+\infty)\ni x \longmapsto \frac{\sin x}{x} \in \mathbb{R}$$

non è sommabile, quindi l'integrale $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ non esiste nel senso di Lebesgue :

$$\int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \geq \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{(2k+1)\pi/2-\pi/4}^{(2k+1)\pi/2} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{(2k+1)\pi/2-\pi/4}^{(2k+1)\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{(2k+1)\pi} \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{(2k+1)\pi} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \\
&\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+2} \overset{n=k+1}{=} \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \\
&= +\infty
\end{aligned}
$$

perché la serie armonica diverge.