NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2008/2009
Calcolo 1, Esame scritto del 20.01.2009

1) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + x\,.$$

a) Determinare il dominio (massimale) di f .

b) Trovare tutti gli asintoti di f .

c) Trovare tutti i massimi e minimi locali di f .

d) Tracciare un grafico qualitativo per f .

2) Determinare una primitiva della funzione $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x - x^2}}\,.$$

3) Determinare tutti i valori del parametro reale β per cui il seguente limite esiste, è finito ed è diverso da zero :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\beta} \log\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right) .$$

4) Trovare tutti i massimi e minimi locali della funzione f definita sul quadrato $(1,8)\times(1,8)$ tramite la formula

$$f(x,y) = \log \frac{x\,y}{(1+x)\,(x+y)\,(y+8)} .$$

5) Trovare il numero reale $a > 0$ per cui la lunghezza del grafico della funzione

$$g(x) = x^{\frac{3}{2}} , \qquad 0 \le x \le a$$

è uguale a $\frac{56}{27}$. Poi si calcoli l'integrale della forma differenziale

$$(x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x + 2\,x\,y\,\mathrm{d}y$$

lungo il grafico di g .

Soluzioni:

1) **:** a) Il dominio di f consiste da tutti i numeri reali x per quali $\dfrac{1}{x^2}$ ha senso e perciò è uguale a

$$\mathbb{R}\setminus\{0\} = \big(-\infty, 0\big) \cup \big(0, +\infty\big) .$$

b) Poiché $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, f ha un asintoto verticale in $x = 0$, sia da sinistra che da destra.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} .$$

Verifichiamo l'esistenza di questo limite :

$$m_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + 1 = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} + 1 = 2 .$$

La seconda condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to +\infty$, necessariamente di forma

$$y = m_+ x + n_+$$

e nel nostro caso $y = 2x + n_+$, è l'esistenza del limite finito

$$n_+ = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - m_+ x\big) .$$

Verifichiamo che anche questo limite esiste :

$$\begin{aligned} n_+ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + x - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - x\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - x\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + x\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + x} = 0 . \end{aligned}$$

Cosicché

$$y = 2\,x \text{ è un asintoto obliquo di } f \text{ per } x \to +\infty\,.$$

D'altro canto esiste

$$m_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + 1 \overset{x\leq 0}{=} \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} + 1 = 0\,,$$

perciò l'asintoto obliquo per $x \to -\infty$, se esiste, dev'essere un asintoto orizzontale. Verifichiamo che esiste:

$$\begin{aligned}
n_- &= \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - m_-\,x\big) = \lim_{x\to-\infty} f(x) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + x \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - x\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - x} = 0\,.
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$y = 0 \text{ è un asintoto orizzontale di } f \text{ per } x \to -\infty\,.$$

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f , dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}}\left(2\,x - \frac{2}{x^3}\right) + 1 = \frac{x^4 - 1}{x^3\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} + 1 \\
&= \frac{x^4 + \frac{x^3}{|x|}\sqrt{x^4+1} - 1}{\frac{x^3}{|x|}\sqrt{x^4+1}}\,,
\end{aligned}$$

cioè

$$f'(x) = \frac{x^4 - x^2\sqrt{x^4+1} - 1}{-x^2\sqrt{x^4+1}} = \frac{1 + x^2\sqrt{x^4+1} - x^4}{x^2\sqrt{x^4+1}} \ \text{ per } \ x < 0$$

e

$$f'(x) = \frac{x^4 + x^2\sqrt{x^4+1} - 1}{x^2\sqrt{x^4+1}} \ \text{ per } \ x > 0 \, .$$

Poiché $1 + x^2\sqrt{x^4+1} - x^4 \geq 1$, abbiamo $f'(x) > 0$ per ogni $x < 0$. Perciò $f'(x) = 0$ è possibile solo per un $x > 0$ ed è quindi equivalente alla validità delle due condizioni

$$x^4 + x^2\sqrt{x^4+1} - 1 = 0 \ , \ x > 0 \, . \tag{*}$$

Ma (*) implica

$$\underbrace{\left(x^4 - 1\right)^2}_{= x^8 - 2x^4 + 1} = \underbrace{\left(x^2\sqrt{x^4+1}\right)^2}_{= x^8 + x^4}$$

e risultano successivamente

$$x^4 = \frac{1}{3} \, , \quad x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \, .$$

Ora si verifica facilmente che $x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ veramente soddisfa (*). Per di più, poiché $x^4 + x^2\sqrt{x^4+1} - 1$ è una funzione strettamente crescente di $x > 0$, abbiamo

$$f'(x) < 0 \ \text{ per } \ 0 < x < \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \ \text{ e } \ f'(x) > 0 \ \text{ per } \ x > \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \, .$$

Risulta che f è

$$\begin{aligned} &\text{strettamente crescente in } \big(-\infty, 0\big) \, , \\ &\text{strettamente decrescente in } \left(0, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) , \\ &\text{strettamente crescente in } \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, +\infty\right) . \end{aligned}$$

In particolare, $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$ è un punto di minimo locale.

Calcoliamo pure il valore di f nel punto di minimo locale $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} \approx 1,316$:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} = \frac{3}{\sqrt[4]{3}} \approx 2,278 \,.$$

Riportiamo il comportamento di f' e di f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		0		$1/\sqrt[4]{3}$		$+\infty$
f'		$+$	$*$	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$3/\sqrt[4]{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Rimarchiamo anche che la derivata seconda di f è ovunque > 0, perciò f è convessa sia in $\big(-\infty, 0\big)$ che in $\big(0, +\infty\big)$:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^4 - 1}{x^3\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2}}} + 1\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(x - \frac{1}{x^3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{-1/2} + 1\right) \\
&= \left(1 + \frac{3}{x^4}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{-1/2} \\
&\qquad - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x^3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{-3/2}\left(2x - \frac{2}{x^3}\right) \\
&= \left(1 + \frac{3}{x^4}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{-1/2} - \left(x - \frac{1}{x^3}\right)^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{-3/2} \\
&= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{-3/2}\left(\left(1 + \frac{3}{x^4}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x - \frac{1}{x^3}\right)^2\right) \\
&= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{-3/2}\left(\frac{6}{x^2} + \frac{2}{x^6}\right) > 0 \,.
\end{aligned}$$

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f:

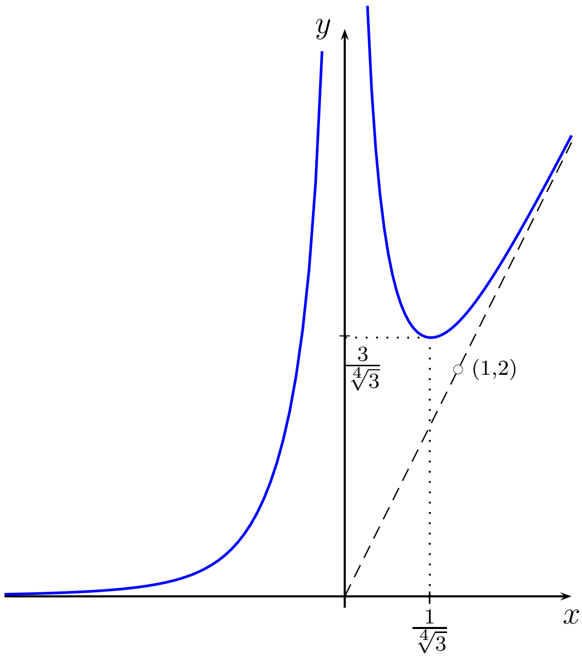
$y = 0$ è asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$, mentre $x = 0$ è asintoto verticale di f. Il grafico di f sale da 0 a $-\infty$ all'infinito in 0.

In $x = 0$ la funzione f non è definita.

Nel secondo tratto il grafico scende dall'infinito in 0 fino a $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{3}{\sqrt[4]{3}}\right)$, un punto di minimo locale, nel quale il grafico ha tangente orizzontale. Sale poi all'infinito a $+\infty$, ha per $x \to +\infty$ l'asintoto obliquo $y = 2x$ e resta sempre sopra l'asintoto :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + x > \sqrt{x^2} + x = 2x\,, \qquad x > 0\,.$$

Il grafico di f:



2) : **Prima soluzione.** Per $0 < x < 1$ abbiamo

$$\frac{x^2}{\sqrt{x - x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}} = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,,$$

perciò per il calcolo dell'integrale indefinito

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x - x^2}}\,\mathrm{d}x = \int x\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

possiamo usare la sostituzione

$$t = \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,, \qquad x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

con

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)'\mathrm{d}t = \left(\frac{t^2+1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)'\mathrm{d}t = \frac{2\,t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

Si ottiene

$$\int x\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{1+t^2}\,t\,\frac{2\,t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2\,t^4}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t\ .$$

Lo sviluppo di $\dfrac{2\,t^4}{(1+t^2)^3}$ in fratti semplici è particolarmente semplice :

$$\begin{aligned}\frac{2\,t^4}{(1+t^2)^3} &= \frac{2\,(t^2+1)^2 - 4\,t^2 - 2}{(1+t^2)^3} = \frac{2\,(t^2+1)^2 - 4\,(t^2+1) + 2}{(1+t^2)^3}\\ &= \frac{2}{1+t^2} - \frac{4}{(1+t^2)^2} + \frac{2}{(1+t^2)^3}\,.\end{aligned}$$

Ora ricordiamo la formula di ricorrenza

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{1}{2\,n}\,\frac{t}{(1+t^2)^n} + \frac{2\,n-1}{2\,n}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}\ ,$$

valida per ogni intero $n \geq 1$:

Infatti, usando integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} &= \frac{t}{(1+t^2)^n} - \int t\left(-\,n\frac{2\,t}{(1+t^2)^{n+1}}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2\,n\int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2\,n\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} - 2\,n\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}\,,\end{aligned}$$

ossia

$$2n\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}=\frac{t}{(1+t^2)^n}+(2n-1)\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}\,.$$

In particolare,

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}&=\frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\&=\frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C\,,\end{aligned}$$

e poi

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^3}&=\frac{1}{4}\,\frac{t}{(1+t^2)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\\&=\frac{1}{4}\,\frac{t}{(1+t^2)^2}+\frac{3}{8}\,\frac{t}{1+t^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}t+C\,.\end{aligned}\tag{**}$$

Risulta

$$\begin{aligned}\int\frac{2t^4}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t&=\int\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t-\int\frac{4}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t+\int\frac{2}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t\\&=2\operatorname{arctg}t-\left(2\,\frac{t}{1+t^2}+2\operatorname{arctg}t\right)\\&\qquad+\left(\frac{1}{2}\,\frac{t}{(1+t^2)^2}+\frac{3}{4}\,\frac{t}{1+t^2}+\frac{3}{4}\operatorname{arctg}t\right)+C\\&=\frac{1}{2}\,\frac{t}{(1+t^2)^2}-\frac{5}{4}\,\frac{t}{1+t^2}+\frac{3}{4}\operatorname{arctg}t+C\,.\end{aligned}$$

Tenendo conto che $t=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$, e quindi

$$1+t^2=\frac{1}{1-x}\,,\quad\frac{1}{1+t^2}=1-x\,,\quad\frac{t}{1+t^2}=\sqrt{x-x^2}\,,$$

concludiamo :

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^2}{\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{2\,t^4}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}(1-x)\sqrt{x-x^2} - \frac{5}{4}\sqrt{x-x^2} + \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C \\
&= -\,\frac{2\,x+3}{4}\sqrt{x-x^2} + \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C\,.
\end{aligned}$$

Rimarchiamo che abbiamo usato una delle cosiddette *sostituzioni di Eulero* :

il calcolo dell'integrale di una funzione razionale di x e $\sqrt{ax^2+bx+c}$, nel caso che $ax^2+bx+c=0$ ha zeri reali $x_1 < x_2$, può essere ridotto all'integrazione di una funzione razionale tramite la sostituzione

$$t = \sqrt{a\,\frac{x-x_1}{x-x_2}}$$

oppure

$$s = \sqrt{a\,\frac{x-x_2}{x-x_1}}\,.$$

Nel nostro caso, avendo $ax^2+bx+c = x-x^2$, le sostituzioni di cui sopra sono

$$t = \sqrt{(-1)\,\frac{x-0}{x-1}} = \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,,$$

oppure

$$s = \sqrt{(-1)\,\frac{x-1}{x-0}} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,.$$

Nei calcoli precedenti abbiamo fatto uso della prima sostituzione, ma possiamo fare i calcoli anche usando la seconda sostituzione :

$$s = \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,, \quad x = \frac{1}{1+s^2}\,, \quad \mathrm{d}x = -\,\frac{2\,s}{(1+s^2)^2}\,\mathrm{d}s$$

e si ottiene

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int x\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{1+s^2}\,\frac{1}{s}\Big(-\,\frac{2\,s}{(1+s^2)^2}\Big)\,\mathrm{d}s \\ &= -\,2\int \frac{\mathrm{d}s}{(1+s^2)^3}\ .\end{aligned}$$

Usando (**) e tenendo conto che

$$1+s^2=\frac{1}{x}\,,\quad \frac{1}{1+s^2}=x\,,\quad \frac{s}{1+s^2}=\sqrt{x-x^2}\,,$$

concludiamo :

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x &= -\,\frac{1}{2}\,\frac{s}{(1+s^2)^2}-\frac{3}{4}\,\frac{s}{1+s^2}-\frac{3}{4}\,\mathrm{arctg}\,s+C \\ &= -\,\frac{1}{2}\,x\sqrt{x-x^2}-\frac{3}{4}\sqrt{x-x^2}-\frac{3}{4}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+C \\ &= -\,\frac{2\,x+3}{4}\sqrt{x-x^2}-\frac{3}{4}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+C\ .\end{aligned}$$

I due risultati non sono contraddittori perché

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\theta}=\mathrm{ctg}\,\theta=\mathrm{tg}\Big(\frac{\pi}{2}-\theta\Big)\,,\qquad \theta\in\Big(0,\frac{\pi}{2}\Big)$$

implica

$$\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\lambda}=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,\lambda\,,\qquad \lambda>0$$

e così

$$\begin{aligned}&-\,\frac{2\,x+3}{4}\sqrt{x-x^2}-\frac{3}{4}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+C \\ &= -\,\frac{2\,x+3}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{3}{4}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}-\frac{3}{4}\,\frac{\pi}{2}+C\ .\end{aligned}$$

Seconda soluzione. Poiché $\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}$ e per $x=\sin^2 t$ $\Big($ove $0<x<1$ corrisponde a $0<t<\dfrac{\pi}{2}\Big)$ nelle espressioni $\sqrt{x}=\sin t\,,$

$\sqrt{1-x} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ i radicali si sciolgono, ci proponiamo usare la sostituzione

$$x = \sin^2 t\,, \quad \sqrt{x} = \sin t\,, \quad \sqrt{1-x} = \cos t\,, \quad \mathrm{d}x = 2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t\ .$$

Si ottiene

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^4 t}{\sin t\cos t}\, 2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \int 2\sin^4 t\,\mathrm{d}t\ .$$

Per integrare $2\sin^4 t$ possiamo usare

$$\begin{aligned} 2\sin^4 t &= 2\left(\frac{1-\cos(2t)}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \cos(2t) + \frac{1}{2}\cos^2(2t) \\ &= \frac{1}{2} - \cos(2t) + \frac{1}{2}\,\frac{1+\cos(4t)}{2} = \frac{3}{4} - \cos(2t) + \frac{1}{4}\cos(4t) \end{aligned}$$

e risulta

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int 2\sin^4 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{4}t - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{16}\sin(4t) + C \\ &= \frac{3}{4}t - \sin t\cos t + \frac{1}{8}\sin(2t)\cos(4t) + C \\ &= \frac{3}{4}t - \sin t\cos t + \frac{1}{4}\big(\sin t\cos t\big)\big(1 - 2\sin^2 t\big) + C \\ &= \frac{3}{4}\arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + \frac{1}{4}\sqrt{x-x^2}\,\big(1-2x\big) + C \\ &= \frac{3}{4}\arcsin\sqrt{x} - \frac{3+2x}{4}\sqrt{x-x^2} + C\ . \end{aligned}$$

Rimarchiamo che il risultato ottenuto è identico a quello ottenuto nella prima soluzione. Infatti, poiché

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,, \qquad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

e così

$$\arcsin\lambda = \mathrm{arctg}\,\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,, \qquad 0 < \lambda < 1\,,$$

abbiamo

$$\frac{3}{4}\arcsin\sqrt{x} = \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\ .$$

3) **:** Poiché

$$\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right) = \log 1 = 0\,,$$

per $\beta \leq 0$ abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^\beta \log\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right) = 0\,.$$

Supponiamo adesso che $\beta > 0$. Allora il limite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x^\beta \log\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)}{x^{-\beta}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\frac{2}{\pi} + \log\big(\operatorname{arctg} x\big)}{x^{-\beta}} \\
\underline{\text{per de l'Hospital}} \ \to \quad &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\beta\, x^{-\beta-1}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-\beta \operatorname{arctg} x}\cdot \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\beta+1}}{1+x^2} \\
&= -\ \frac{2}{\pi\,\beta}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\beta+1}}{1+x^2}
\end{aligned}$$

risulta essere uguale a 0 per $(0<)\,\beta < 1$, a $-\dfrac{2}{\pi\,\beta} = -\dfrac{2}{\pi}$ per $\beta = 1$, ed a $-\infty$ per $\beta > 1$.

Concludiamo che il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^\beta \log\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)$$

è finito e diverso da zero solo per $\beta = 1$, e per questo valore

$$\lim_{x\to+\infty} x \log\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right) = -\,\frac{2}{\pi}\ .$$

4) **:** I massimi e minimi locali di f sono *punti stazionari*, cioè annullano le derivate parziali di

$$f(x,y) = \log x + \log y - \log(1+x) - \log(x+y) - \log(y+8)\ .$$

Per trovarli, calcoliamo le derivate parziali di f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x+y} = \frac{y-x^2}{x(1+x)(x+y)}\ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y} - \frac{1}{y+8} = \frac{8x-y^2}{y(x+y)(y+8)}\ .$$

Risulta che i punti stazionari di f sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ 8x - y^2 = 0 \end{cases}\ .$$

Troviamo $8\,x = y^2 = (x^2)^2 = x^4$, $x\,(8-x^3) = 0$, $x = 0$ oppure 2 . Ma nessun punto (x,y) con $x = 0$ si trova nel dominio di f, perciò il solo punto stazionario di f è (x,y) con $x = 2$, $y = x^2 = 4$.

Per poter dire se il punto stazionario $(2,4)$ è massimo o minimo locale, calcoliamo anche le derivate parziali di secondo ordine :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(x+y)^2}\ ,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{(x+y)^2}\ ,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+8)^2}\ .$$

Perciò

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,4) = -\frac{1}{9}\ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,4) = \frac{1}{36}\ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,4) = -\frac{1}{36}$$

e la matrice hessiana di f in $(2,4)$ è

$$\begin{pmatrix} -1/9 & 1/36 \\ 1/36 & -1/36 \end{pmatrix}\ .$$

Poiché il suo determinante è

$$\begin{vmatrix} -1/9 & 1/36 \\ 1/36 & -1/36 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{9}\right)\left(-\frac{1}{36}\right) - \left(\frac{1}{36}\right)^2 = \frac{5}{36^2} > 0\ ,$$

mentre l'elemento nell'angolo superiore è

$$-\frac{1}{9} < 0\,,$$

la hessiana è definita negativa e quindi il punto $(2,4)$ è un massimo locale.

5) **:** Calcoliamo la lunghezza del grafico della funzione

$$g(x) = x^{\frac{3}{2}}\,, \qquad 0 \leq x \leq a\,,$$

di cui la derivata è $g'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$:

$$\int_0^a \sqrt{1+g'(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^a \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x \overset{t=1+\frac{9}{4}x}{=} \int_1^{1+\frac{9}{4}a} \sqrt{t}\,\frac{4}{9}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{9}\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^{1+\frac{9}{4}a}$$
$$= \frac{8}{27}\left(\left(1+\frac{9}{4}a\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

Perché questo valore sia uguale a $\dfrac{56}{27}$ dobbiamo avere

$$\frac{8}{27}\left(\left(1+\frac{9}{4}a\right)^{\frac{3}{2}} - 1 = \frac{56}{27}\,,\right.$$
$$\left(1+\frac{9}{4}a\right)^{\frac{3}{2}} = 8\,,$$
$$1+\frac{9}{4}a = 4\,,$$
$$a = \frac{4}{3}\,,$$

Ora il grafico di g, considerato una curva γ_g, si parametrizza tramite la variabile :

$$\left[0\,,\frac{4}{3}\right] \ni x \longmapsto \gamma_g(x) = \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Risulta

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma_g} (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x + 2\,x\,y\,\mathrm{d}y &= \int\limits_0^{\frac{4}{3}} \left(x^2 - g(x)^2\right)\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{4}{3}} 2\,x\,g(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{\frac{4}{3}} \left(x^2 - x^3 + 2\,x\,x^{\frac{3}{2}}\,\frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^{\frac{4}{3}} \left(x^2 + 2\,x^3\right)\mathrm{d}x = \frac{64}{27}\,.\end{aligned}$$