NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 2, Esame scritto del 15.09.2008

1) Determinare gli intervalli in cui la funzione $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita tramite la formula

$$f(x) = \sqrt{x - \operatorname{arctg} x}$$

è uniformamente continua e quelli in cui è lipschitziana.

2) Dire per quali valori del parametro $\alpha \geq 0$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \dfrac{\alpha}{n}\right)^n} \, .$$

3) Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = e^x \cos\big(2\,x\big)\ .$$

4) Calcolare l'area della regione piana compresa fra le curve

$$y = \frac{x^2}{2}\,, \qquad x^2 + y^2 = 8\,.$$

5) Dire se converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

e si giustifichi la risposta.

Soluzioni:

1) **:** f è derivabile in $(0\,,+\infty)$ e la sua derivata

$$f'(x)=\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{\sqrt{x-\operatorname{arctg}x}}=\frac{1}{\sqrt{x-\operatorname{arctg}x}}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}$$
$$=\sqrt{\frac{x^4}{x-\operatorname{arctg}x}}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

è limitata sull'intero $(0\,,+\infty)$. Infatti,

$$\lim_{0<x\to 0}\frac{x^4}{x-\operatorname{arctg}x}\overset{\text{de L'Hospital}}{=}\lim_{0<x\to 0}\frac{4\,x^3}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim_{0<x\to 0}4x(1+x^2)$$
$$=\ 0$$

e così

$$\lim_{0<x\to 0}f'(x)=0\ ,$$

mentre

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x-\operatorname{arctg}x}}=\frac{1}{\sqrt{+\infty-\dfrac{\pi}{2}}}=0$$

e così

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0\ .$$

Risulta che f è lipschitziana, ed in particolare uniformamente continua, sull'intero dominio $[0\,,+\infty)$.

2) **:** Verifichiamo se il termine generale della serie converge a 0 : poiché

$$\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n}=\frac{n^n\,n^{\frac{1}{n}}}{n^n\left(1+\dfrac{\alpha}{n^2}\right)^n}=\frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\dfrac{\alpha}{n^2}\right)^{n^2\frac{1}{n}}}$$

ed abbiamo

$$\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1\,,\qquad\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n^2}\right)^{n^2}=e^{\alpha}\,,$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n} = \frac{1}{(e^\alpha)^0} = 1\,,$$

cioè il termine generale della serie converge sempre ad 1. Cosicché la serie diverge per ogni $\alpha \geq 0$.

3) **:** Usando integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos\big(2x\big)\,\mathrm{d}x &= \int \cos\big(2x\big)\,\mathrm{d}e^x \\
&= e^x \cos\big(2x\big) + 2\int e^x \sin\big(2x\big)\,\mathrm{d}x \\
&= e^x \cos\big(2x\big) + 2\int \sin\big(2x\big)\,\mathrm{d}e^x \\
&= e^x \cos\big(2x\big) + 2e^x \sin\big(2x\big) - 4\int e^x \cos\big(2x\big)\,\mathrm{d}x\,,
\end{aligned}$$

e poi

$$\begin{aligned}
5\int e^x \cos\big(2x\big)\,\mathrm{d}x &= e^x\Big(\cos\big(2x\big) + 2\sin\big(2x\big)\Big) + C\,, \\
\int e^x \cos\big(2x\big)\,\mathrm{d}x &= \frac{e^x}{5}\Big(\cos\big(2x\big) + 2\sin\big(2x\big)\Big) + C\,.
\end{aligned}$$

Rimarco. Più generalmente abbiamo per ogni $a\,,b \in \mathbb{R}$, almeno uno dei quali non è uguale a zero, cioè con $a^2+b^2>0$,

$$\int e^{ax} \cos\big(bx\big)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\Big(a\cos\big(bx\big) + b\sin\big(bx\big)\Big) + C\,.$$

Supponiamo prima che $a \neq 0$. Usando integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int e^{ax} \cos\big(bx\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a}\int \cos\big(bx\big)\,\mathrm{d}e^{ax} \\
&= \frac{e^{ax}}{a}\cos\big(bx\big) + \frac{b}{a}\int e^{ax} \sin\big(bx\big)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \cos\big(bx\big) + \frac{b}{a^2} \int \sin\big(bx\big)\, \mathrm{d}e^{ax}$$
$$= \frac{e^{ax}}{a} \cos\big(bx\big) + \frac{e^{ax}}{a^2}\, b \sin\big(bx\big) - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos\big(bx\big)\, \mathrm{d}x$$

e risultano successivamente

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \cos\big(bx\big)\, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{e^{ax}}{a} \cos\big(bx\big) + \frac{e^{ax}}{a^2}\, b \sin\big(bx\big) + C\,,$$
$$\int e^{ax} \cos\big(bx\big)\, \mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \Big(a \cos\big(bx\big) + b \sin\big(bx\big)\Big) + C\,.$$

Se invece $a = 0$ e quindi $b \neq 0$, l'ugualità da dimostrare è

$$\int \cos\big(bx\big)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{b} \sin\big(bx\big) + C\,,$$

che vale ovviamente.

4) : Calcoliamo prima i punti di intersezione della parabola $y = \dfrac{x^2}{2}$ con la circonferenza $x^2 + y^2 = 8$, cioè le soluzione del sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}.$$

Tramite la sostituzione $x^2 = 2y$ nella seconda equazione si ottiene

$$y^2 + 2y - 8 = 0\,, \qquad y = -1 \pm 3\,.$$

Poiché $y = \dfrac{x^2}{2} \geq 0$, risulta $y = 2$ e poi $x = \pm\sqrt{2y} = \pm 2$. Quindi i punti di intersezione ricercati sono

$$\big(-2\,,2\big)\,, \quad \big(2\,,2\big)\,.$$

Tra questi due punti la parabola $y = \dfrac{x^2}{2}$ si trova nell'interno della circonferenza $x^2 + y^2 = 8$, mentre per $|x| > 2$ esce dal disco circondato dalla circonferenza. Cosicché la regione in questione si trova sopra l'arco di parabola

$$y = \frac{x^2}{2}\,, \qquad -2 \le x \le 2$$

e sotto l'arco di circonferenza

$$y = \sqrt{8 - x^2}\,, \qquad -2 \le x \le 2\,,$$

Risulta che la sua area è

$$\int\limits_{-2}^{2} \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2} \right) \mathrm{d}x\ .$$

Per il calcolo dell'integrale $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{8 - x^2}\, \mathrm{d}x$ possiamo usare la sostituzione $x = \sqrt{8} \sin t = 2\sqrt{2} \sin t$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{8 - x^2}\, \mathrm{d}x &= \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8 - 8\sin^2 t}\, 2\sqrt{2} \cos t\, \mathrm{d}t = 8 \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\, \mathrm{d}t \\
&= 8 \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos\big(2t\big)}{2}\, \mathrm{d}t = 4 \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t + 4 \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\big(2t\big)\, \mathrm{d}t \\
&= 2\pi + 2 \sin\big(2t\big) \Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi + 4\,.
\end{aligned}$$

Dall'altra parte,

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{x^2}{2}\, \mathrm{d}x = \left. \frac{x^3}{6} \right|_{-2}^{2} = \frac{8}{3}$$

e concludiamo che l'area della regione compresa fra la parabola $y = \dfrac{x^2}{2}$ e la circonferenza $x^2 + y^2 = 8$ è uguale a

$$\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = 2\pi + 4 - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}\,.$$

5) : L'integrale

$$\int_{0}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \tag{*}$$

è improprio in 0. Poiché

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{\log(\sin x)}{\log x} \overset{\text{de L'Hospital}}{=} \lim_{0<x\to 0} \frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{0<x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cos x\right)$$
$$= 1$$

e quindi

$$\lim_{0<x\to 0} \frac{\dfrac{\log(\sin x)}{\sqrt{x}}}{\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}} = 1\,,$$

per il criterio del confronto asintotico

$$\int_{0}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge } \iff \int_{0}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge}\,.$$

Ma quest'ultimo integrale possiamo calcolare esplicitamente usando la sostituzione $x = t^2$:

$$\int_{0}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{\log t^2}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \big(\log t\big)\,\mathrm{d}\log t = \big(\log t\big)^2\Big|_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$
$$= \left(\log\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 < +\infty\,.$$

Pertanto l'integrale improprio (*) converge.