NOME: . . . . **MATRICOLA:** . . . .

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2012/2013
Analisi Reale e Complessa, Esame del 13.09.2013

1) a) Si verifichi che per ogni funzione sommabile $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione sommabile limitata $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big|g(x) - h(x)\big| \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \,.$$

b) Si dimostri che per ogni funzione sommabile limitata $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e per ogni $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sommabile abbiamo

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(kx)\, g(x) \,\mathrm{d}x = 0 \,.$$

Suggerimento: Usando a) si riduca la dimostrazione di b) al caso di un g sommabile e limitata.

2) È sommabile la funzione $f : [1\,, +\infty) \times [1\,, +\infty)] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x\,, y) = \frac{x\,y}{(x^2 + y^2)^2} \ ?$$

3) I) Esibire una funzione olomorfa non costante $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $f(z) = f(z+1)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

II) Sia $w \in \mathbb{C}$ un numero non reale. Dimostrare che se $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa tale che $g(z) = g(z+1) = g(z+w)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ allora g è costante.

Suggerimento: Si usi il teorema di Liouville.

III) Sia $\Gamma := \{m + nw\,; m\,, n \in \mathbb{Z}\}$ e sia $h : \mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $h(z) = h(z+1) = h(z+w)$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Mostrare che i punti di Γ non possono essere poli semplici per h.

Suggerimento: Si calcoli il residuo di h in 0 usando un opportuno cammino.

IV) (Facoltativo) Sia $k : \mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $k(z) = k(z+1) = k(z+w)$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Sia l'origine un polo di ordine $n > 1$ per k. Mostare che k è suriettiva.

4) Calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x^2 + \pi x} dx$$

usando il teorema dei residui.

Suggerimento: Si osservi che $\dfrac{\sin(x)}{x^2 + \pi x}$ è la parte immaginaria di $\dfrac{e^{ix}}{x^2 + \pi x}$.

Soluzioni:

1) **:** a) Sia

$$E_k := \big\{ x \in \mathbb{R}\,;\, |g(x)| \leq k \big\}\,, \quad k \geq 1\,.$$

Per la misurabilità di g ogni insieme E_k è misurabile. Siccome

$$E_1 \subset E_2 \subset \ \dots \ \text{e} \ \bigcup_{k\geq 1} E_k = \mathbb{R}\,,$$

la successione di funzioni caratteristiche $\big(\chi_{E_k}\big)_{k\geq 1}$ è crescente e converge puntualmente alla funzione identicamente 1.

Poniamo

$$h_k := g\,\chi_{E_k}\,, \qquad k \geq 1\,.$$

Allora le funzioni h_k sono misurabili e soddisfano le stime $|h_k| \leq |g|$ e $|h_k| \leq k$. Di conseguenza ogni h_k è sommabile e limitata.

Inoltre, per il teorema sella convergenza dominata vale

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big|g(x) - h_k(x)\big|\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\,\big(1 - \chi_{E_k}\big)\,\mathrm{d}x \longrightarrow 0\,.$$

Risulta che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero $k_\varepsilon \geq 1$ tale che

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big|g(x) - h_k(x)\big|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \ \text{ per } \ k \geq k_\varepsilon\,.$$

b) **Assumendo che g è anche limitata:**

Indichiamo

$$\|g\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| < +\infty\,.$$

Abbiamo per ogni intero $k \geq 1$

$$\Bigg|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(kx)\,g(x)\,\mathrm{d}x\Bigg| = \Bigg|\frac{1}{k}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,g\Big(\frac{y}{k}\Big)\,\mathrm{d}y\Bigg| \leq \frac{\|g\|_\infty}{k}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|\,\mathrm{d}y$$

e di conseguenza

$$\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(kx)\, g(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Rimarchiamo che quando g è anche limitata non abbiamo avuto bisogno della limitatezza di f !

Assumendo g solo sommabile:

Indichiamo

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < +\infty\,.$$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Per il punto a) esiste una funzione sommabile limitata $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tale che

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big|g(x)-h(x)\big|\,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{2\,\|f\|_\infty}\,.$$

Poi, per il caso già trattato del punto b), esiste un intero $k_\varepsilon \geq 1$ tale che

$$\Big|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(kx)\, h(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad k\geq k_\varepsilon\,.$$

Risulta per ogni $k\geq k_\varepsilon$

$$\begin{aligned}\Big|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(kx)\, g(x)\,\mathrm{d}x\Big| &\leq \Big|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(kx)\big(g(x)-h(x)\big)\,\mathrm{d}x\Big| + \Big|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(kx)\, h(x)\,\mathrm{d}x\Big| \\ &\leq \|f\|_\infty \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big|g(x)-h(x)\big|\,\mathrm{d}x + \Big|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(kx)\, h(x)\,\mathrm{d}x\Big| \\ &\leq \|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{2\,\|f\|_\infty} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\,.\end{aligned}$$

2) : La funzione f è continua e quindi misurabile. Essendo anche positiva, la sua sommabilità è equivalente alla validità di

$$\int\limits_{[1,+\infty)\times[1,+\infty)} f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < +\infty\,.$$

Calcolo dell'integrale di cui sopra con il teorema di Tonelli:

Per ogni $x > 0$ abbiamo

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y &= \frac{x}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}(x^2+y^2)\\ &= \frac{x}{2}\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\bigg|_{y=1}^{y=+\infty}\right)\\ &= \frac{x}{2\,(x^2+1)}\end{aligned}$$

ed usando il teorema di Tonelli otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{[1\,,+\infty)\times[1\,,+\infty)} f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{[1\,,+\infty)\times[1\,,+\infty)} \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_1^{+\infty}\left(\int_1^{+\infty} \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_1^{+\infty} \frac{x}{2\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}(x^2+1)\\ &= \frac{1}{4}\ln(x^2+1)\bigg|_{x=1}^{x=+\infty}\\ &= +\infty\,.\end{aligned}$$

Calcolo dell'integrale di cui sopra usando coordinate polari:

Poiché

$$\begin{aligned}&[1\,,+\infty)\times[1\,,+\infty)\\ &=\left\{\big(\rho\cos\theta\,,\rho\sin\theta\big)\,;\sqrt{2}\le\rho<+\infty\,,\arcsin\frac{1}{\rho}\le\theta\le\arccos\frac{1}{\rho}\right\},\end{aligned}$$

otteniamo

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{[1\,,+\infty)\times[1\,,+\infty)} f(x\,,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int\limits_{[1\,,+\infty)\times[1\,,+\infty)} \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \int\limits_{\arcsin\frac{1}{\rho}}^{\arccos\frac{1}{\rho}} \frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^4}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{\rho}\Bigg(\int\limits_{\arcsin\frac{1}{\rho}}^{\arccos\frac{1}{\rho}} \sin\theta\,\mathrm{d}(\sin\theta)\Bigg)\mathrm{d}\rho \\
&= \int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{\rho}\left(\frac{\sin^2\theta}{2}\Bigg|_{\theta=\arcsin\frac{1}{\rho}}^{\theta=\arccos\frac{1}{\rho}}\right)\mathrm{d}\rho \\
&= \int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{2\,\rho}\left(\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right)-\frac{1}{\rho^2}\right)\mathrm{d}\rho \\
&= \int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\,\rho}-\frac{1}{\rho^2}\right)\mathrm{d}\rho \\
&= +\infty\,.
\end{aligned}
$$

Di conseguenza f non è sommabile.

3) : I) Possiamo porre $f(z) := e^{2\pi i z}$.

II) Sia P il parallelogramma chiuso di vertici 0, 1, $1+w$ e w. Siccome $g(z) = g(z+1) = g(z+w)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ abbiamo $f(P) = f(\mathbb{C})$. Siccome P è compatto e g è continua, l'immagine di g è compatta e dunque g è limitata. Per il teorema di Liouville g è quindi costante.

III) Siccome $h(z) = h(z+1) = h(z+w)$ per ogni $z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$, un punto in Γ è polo semplice per h se e solo se tutti i punti di Γ sono poli semplici per h. Basta quindi dimostare che 0 non è polo semplice per h.

Se 0 fosse un polo semplice per h, il residuo $Res(h,0)$ in 0 di h sarebbe non nullo.

D'altra parte $Res(h,0)$ può essere calcolato integrando lungo il bordo del parallelogramma chiuso Q di vertici

$$-1/2 - w/2\,, \quad 1/2 - w/2\,, \quad 1/2 + w/2\,, \quad -1/2 + w/2\,.$$

Infatti, siccome h è olomorfa su un aperto di $\mathbb{C}$ contenente $Q \setminus \{0\}$, si ha

$$Res(h,0) = \frac{1}{12\pi i} \int\limits_{\partial^+ Q} h(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Inoltre

$$\int\limits_{\partial^+ Q} h(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

perché somma degli integrali di linea di $h(z)\mathrm{d}z$ sui lati orizzontali di Q e di quelli sui lati obliqui di Q: gli integrali di linea di $h(z)\mathrm{d}z$ sui lati orizzontali di Q si elidono perché $h(z) = h(z+w)$, quelli sui lati obliqui si elidono perché $h(z) = h(z+1)$.

Se ne conclude che $Res(h,0) = 0$ e di conseguenza h non può ammettere un polo semplice in 0.

IV) Sia $c \in \mathbb{C}$ un qualsiasi numero complesso. Dobbiamo mostrare che $c \in k(\mathbb{C} \setminus \Gamma)$ o, equivalentemente, che la funzione $k(z) - c$ si annulla in qualche punto z di $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Sia Q il parallelogramma introdotto nella soluzione di III. Se $k(z)-c$ si annulla su un punto del bordo di Q, non abbiamo nulla da dimostrare.

Se invece $k(z) - c$ non si annulla sul bordo ∂Q di Q, consideriamo il suo differenziale logaritmico $\dfrac{k'(z)}{k(z)-c}\mathrm{d}z$. La funzione

$$\widetilde{k}(z) := \frac{k'(z)}{k(z)-c}$$

è tale che $\widetilde{k}(z) = \widetilde{k}(z+1) = \widetilde{k}(z+w)$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ dove è definita (in particolare per ogni $z \in \partial Q$). Come nella soluzione di III, l'integrale lungo il bordo di Q della forma $\widetilde{k}(z)\,\mathrm{d}z$ è nullo e quindi abbiamo

$$\int\limits_{\partial^+ Q} \frac{k'(z)}{k(z)-c}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\partial^+ Q} \widetilde{k}(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Per il principio dell'argomento $\int_{\partial^+ Q} \frac{k'(z)}{k(z)-c} dz$ calcola il numero degli zeri meno il numero dei poli (entrambi contati con molteplicità) contenuti in Q della funzione meromorfa $k(z) - c$. Siccome lo zero è un polo di ordine n contenuto in Q e $\int\limits_{\partial^+ Q} \frac{k'(z)}{k(z)-c} \mathrm{d}z = 0$, deve esistere almeno un punto in Q su cui $k(z) - c$ si annulli.

IV) (Altra soluzione) Siccome la funzione k ha solo singolarità polari, essa definisce una funzione olomorfa $\hat{k}$ da $\mathbb{C}$ nella sfera di Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. Siccome questa funzione è olomorfa e non costante, essa è aperta e la sua immagine è perciò un aperto di $\widehat{\mathbb{C}}$. Inoltre, come nella soluzione del punto II, si ha $\hat{k}(\mathbb{C}) = \hat{k}(P)$. Siccome $\hat{k}$ è in particolare continua, la sua immagine $\hat{k}(\mathbb{C}) = \hat{k}(P)$ è anche compatta e quindi chiusa. Infine, poiché $\hat{\mathbb{C}}$ è connessa e l'immagine di $\hat{k}$ è aperta e chiusa, si ottiene che $\hat{k}$ è suriettiva. Ne segue che anche k è suriettiva.

4) : La funzione $\frac{\sin(x)}{x^2 + \pi x}$ si estende ad un funzione continua su tutto $\mathbb{R}$ e

$$\left| \frac{\sin(x)}{x^2 + \pi x} \right| \leq \frac{1}{|x^2 + \pi x|} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} .$$

Siccome $\frac{1}{|x^2 + \pi x|}$ è integrabile intorno a $+\infty$ e $-\infty$, l'integrale cercato è finito e

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x^2 + \pi x} \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int\limits_{-1/\epsilon}^{-\pi-\epsilon} \frac{\sin(x)}{x^2 + \pi x} \mathrm{d}x + \int_{-\pi+\epsilon}^{-\epsilon} \frac{\sin(x)}{x^2 + \pi x} \mathrm{d}x + \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \frac{\sin(x)}{x^2 + \pi x} \mathrm{d}x .$$

Per calcolare il limite integriamo la funzione meromorfa f definita da $f(z) := \frac{e^{iz}}{z^2 + \pi z}$ lungo il cammino $\gamma_\epsilon = \sum_{k=1}^{6} \gamma_{k,\epsilon}$ dove

- $\gamma_{1,\epsilon}$ è il segmento orientato di estremi ϵ e $1/\epsilon$,
- $\gamma_{2,\epsilon}$ è la semicirconferenza superiore di centro 0 e raggio $1/\epsilon$, orientata in senso antiorario,

- $\gamma_{3,\epsilon}$ è il segmento orientato di estremi $-1/\epsilon$ e $-\pi-\epsilon$,
- $\gamma_{4,\epsilon}$ è la semicirconferenza superiore di centro $-\pi$ e raggio ϵ , orientata in senso orario,
- $\gamma_{5,\epsilon}$ è il segmento orientato di estremi $-\pi+\epsilon$ e $-\epsilon$,
- $\gamma_{6,\epsilon}$ è la semicirconferenza superiore di centro 0 e raggio ϵ , orientata in senso orario.

Con questa notazione abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x^2+2\pi x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\gamma_{1,\epsilon}+\gamma_{3,\epsilon}+\gamma_{5,\epsilon}} \Im(f(z))\,\mathrm{d}z =$$

$$\Im\left(\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\gamma_{1,\epsilon}+\gamma_{3,\epsilon}+\gamma_{5,\epsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z\right)$$

dove $\Im$ indica la parte immaginaria e l'ultima uguaglianza è vera se il limite $\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\gamma_{1,\epsilon}+\gamma_{3,\epsilon}+\gamma_{5,\epsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z$ esiste.

Siccome la funzione meromorfa $f(z)$ non ha poli nella parte di piano complesso limitata delimitata da γ_ϵ (con $0<\epsilon<1/2\pi$), applicando il teorema dei residui otteniamo $\int_{\gamma_\epsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ e di conseguenza

$$\int_{\gamma_{1,\epsilon}+\gamma_{3,\epsilon}+\gamma_{5,\epsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma_{2,\epsilon}+\gamma_{4,\epsilon}+\gamma_{6,\epsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Siccome $|e^{iz}|\leq 1$ per z appartenente al semipiano superiore, si ha $f(z)\leq \dfrac{2}{|z|}$ su $\gamma_{\epsilon,2}$ per ϵ abbastanza piccolo. Possiamo quindi applicare il lemma del grande cerchio su $\gamma_{2,\epsilon}$ e otteniamo

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\gamma_{2,\epsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Siccome $f(z)$ ha poli semplici su $-\pi$ e 0 , possiamo applicare il lemma del piccolo cerchio agli integrali su $\gamma_{4,\epsilon}$ e $\gamma_{6,\epsilon}$:

Osservando che l'angolo percorso da entrambi i cammini $\gamma_{4,\epsilon}$ e $\gamma_{6,\epsilon}$ è pari a $-\pi$, otteniamo

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int\limits_{\gamma_{4,\epsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\pi i\ Res(f,-\pi) = -\pi i \lim_{z\to-\pi} \frac{e^{iz}}{z} = -\pi i\ \frac{1}{\pi} = -i\ ,$$

e

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int\limits_{\gamma_{6,\epsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\pi i\ Res(f,0) = -\pi i \lim_{z\to 0} \frac{e^{iz}}{z+\pi} = -\pi i\ \frac{1}{\pi} = -i\ .$$

Quindi

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int\limits_{\gamma_{1,\epsilon}+\gamma_{3,\epsilon}+\gamma_{5,\epsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\sum_{k=1}^{3} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int\limits_{\gamma_{2k,\epsilon}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2i$$

e

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x^2+2\pi x}\,\mathrm{d}x = \Im(2i) = 2.$$