NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2007/2008
Analisi Matematica 2, Esame scritto del 12.06.2008

1) Determinare gli intervalli in cui la funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita tramite la formula

$$f(x) = \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$$

è uniformamente continua e quelli in cui è lipschitziana.

2) Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\Big(1 + (\sin x)^2\Big) \cos x} \, .$$

3) Determinare i valori del parametro reale β per cui il seguente limite esiste, è finito ed è diverso da zero :

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\beta} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right) .$$

4) Determinare i valori del parametro reale α per cui il seguente integrale improprio converge :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{x^{\alpha}} \, \mathrm{d}x .$$

5) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^{\alpha n}} .$$

Soluzioni:

1) **:** f è derivabile e la sua derivata

$$f'(x) = \frac{\cos\sqrt[3]{x}\cdot\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$
$$= \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt[3]{x}\cos\sqrt[3]{x} - \sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4}}$$

è limitata su ogni intervallo della forma $(a, +\infty)$ con $a > 0$, ma non su $(0, +\infty)$. Infatti, poiché

$$\left|\frac{\sqrt[3]{x}\cos\sqrt[3]{x} - \sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4}}\right| \le \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^4}} \le \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2}{x}, \qquad x \ge 1,$$

vale

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0,$$

mentre, usando la regola di de l'Hospital, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{0<x\to 0} f'(x) &\overset{t=\sqrt[3]{x}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{1}{3}\,\frac{t\cos t - \sin t}{t^4}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{3}\,\frac{\cos t - t\sin t - \cos t}{4t^3}\\ &= \lim_{t\to 0} -\frac{1}{12}\,\frac{\sin t}{t}\,\frac{1}{t}\\ &= -\infty.\end{aligned}$$

Risulta che gli intervalli in cui f è lipschitziana sono

$$(a, +\infty), \qquad a > 0.$$

D'altro canto, poiché f è continua ed esistono i limiti finiti

$$\lim_{0<x\to 0} f(x) = \lim_{0<t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

f è uniformemente continua in tutto il suo dominio.

2) : Usando la sostituzione $u = \sin x$, si ottiene prima

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\Big(1+(\sin x)^2\Big)\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\Big(1+(\sin x)^2\Big)\Big((\cos x)^2\Big)}\,\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\Big(1+(\sin x)^2\Big)\Big(1-(\sin x)^2\Big)}\,\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{1-(\sin x)^4}\,\underbrace{\cos x}_{(\sin x)'}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{1-u^4}\,\mathrm{d}u\,.
\end{aligned}$$

Ora, per integrare la funzione $\dfrac{1}{1-u^4}$ usiamo il suo sviluppo in fratti semplici :

La decomposizione del polinomio con coefficienti reali $1-u^4$ in fattori irriducili è $1-u^4 = (1-u)\,(1+u)\,(1+u^2)$. Perciò

$$\frac{1}{1-u^4} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \frac{C\,u+D}{1+u^2}\,,$$

cioè

$$1 = A\,(1+u)(1+u^2) + B\,(1-u)(1+u^2) + (C\,u+D)\,(1-u^2)$$

per opportune costanti reali A, B, C, D . Per $u=1$ otteniamo

$$1 = 4\,A\,,\ \text{ossia}\ A = \frac{1}{4}\,,$$

mentre per $u=-1$,

$$1 = 4\,B\,,\ \text{ossia}\ B = \frac{1}{4}\,.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
(C\,u+D)\,(1-u^2) &= 1 - \frac{1}{4}(1+u)(1+u^2) - \frac{1}{4}(1-u)(1+u^2) \\
&= 1 - \frac{1}{2}(1+u^2) = \frac{1}{2}(1-u^2)
\end{aligned}$$

e risulta

$$C\,u + D = \frac{1}{2}\,, \text{ cioè } C = 0\,,\ D = \frac{1}{2}\,.$$

Concludiamo che

$$\frac{1}{1-u^4} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-u} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+u} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+u^2}\,.$$

Risulta

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-u^4}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1-u}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{4}\log|1-u| + \frac{1}{4}\log|1+u| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u + C \\ &= \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u + C\end{aligned}$$

e così

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\big(\sin x\big) + C$$

3) : Poiché

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\,x\right) = 0\,,$$

per $\beta \leq 0$ abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\beta}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\,x\right) = 0\,.$$

Supponiamo adesso che $\beta > 0$. Allora il limite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^{\beta}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\,x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\,x}{x^{-\beta}} \\ \underline{\text{per de l'Hospital}} \rightarrow \quad &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\beta\,x^{-\beta-1}} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\beta+1}}{\beta\,(1+x^2)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\beta-1}}{\beta\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)}\end{aligned}$$

risulta essere uguale a 0 per $(0<)\,\beta<1$, a $\dfrac{1}{\beta}=1$ per $\beta=1$, ed a $+\infty$ per $\beta>0$.

Concludiamo che il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\beta}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\,x\right)$$

è finito e diverso da zero solo per $\beta=1$, e per questo valore

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\,x\right)=1\ .$$

4) **:** L'integrale

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\,x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$$

può essere improprio (dipendente dal valore di α) sia in 0 che a $+\infty$. Esaminiamo separatamente la sua convergenza in 0 ed all'infinito.

Le funzioni $\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\,x}{x^{\alpha}}$ e $\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ sono asintoticamente equivalenti in 0 :

$$\lim_{0<x\to 0}\frac{\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\,x}{x^{\alpha}}}{\dfrac{1}{x^{\alpha}}}=\lim_{0<x\to 0}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\,x\right)=\frac{\pi}{2}\ .$$

Perciò

$$\int\limits_0^{1} \frac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\,x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x\ \text{ converge }\quad\Longleftrightarrow\quad\int\limits_0^{1}\frac{1}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x\ \text{ converge }\quad\Longleftrightarrow\quad \alpha<1\ .$$

D'altro canto, tenendo conto del risultato nell'esercizio 3), la funzione $\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\,x}{x^{\alpha}}$ è asintoticamente equivalente a $+\infty$ alla funzione $\dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\,x}{x^{\alpha}}}{\dfrac{1}{x^{\alpha+1}}}=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\,x\right)=1\ .$$

Di conseguenza

$$\int_1^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge } \iff \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge } \iff \alpha > 0\,.$$

Concludiamo che

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \ \text{ converge} \\
\iff &\int_0^{1} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \ \text{ e } \int_1^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \ \text{ convergono} \\
\iff &\alpha < 1 \ \text{ e } \ \alpha > 0 \\
\iff &0 < \alpha < 1\,.
\end{aligned}$$

5) : Applichiamo il criterio del rapporto : poiché

$$\frac{\dfrac{\big((n+1)!\big)^2}{(n+1)^{\alpha(n+1)}}}{\dfrac{\big(n!\big)^2}{n^{\alpha n}}} = \frac{(n+1)^{2-\alpha}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha n}} \longrightarrow \frac{1}{e^\alpha} \cdot \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}\,,$$

cioè

$$\frac{\dfrac{\big((n+1)!\big)^2}{(n+1)^{\alpha(n+1)}}}{\dfrac{\big(n!\big)^2}{n^{\alpha n}}} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 2 \\ \dfrac{1}{e^2} < 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}\,,$$

la serie data converge se e soltanto se $\alpha \geq 2$.