NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2007/2008
Calcolo 1, Esame scritto del 10.06.2010

1) Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}\,,$$

a) determinare il dominio (massimale) di f ;

b) trovare tutti gli asintoti di f ;

c) trovare tutti i massimi e minimi locali di f ;

d) tracciare un grafico qualitativo di f .

2) Sia data la funzione $f(x) = \big(\ln(1+x)\big)\sin(2x)$.

a) Calcolare, in $x_0 = 0$, il polinomio di Taylor di ordine 3 di f.

b) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 2x^2}{x^3} \quad .$$

3) Studiare, al variare del parametro reale $x > 0$, la convergenza assoluta e semplice della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k(x)}{2^k} \ .$$

Calcolare, se esiste, la somma della serie per $x = e^{-1}$.

4) Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \ .$$

5) Si trovino tutti i numeri complessi z soddisfacenti l'equazione

$$z^2 - \overline{z} = 0 \ .$$

Soluzioni:

1) **:** a) $f(x)$ è definito per ogni $x \in \mathbb{R}$ per quale ha senso $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$, cioè per quali $x^2 - 3 + 2 = (x-1)(x-2) \geq 0$. Perciò il dominio di f è $\big(-\infty\,, 1\big) \cup \big(2\,, +\infty\big)$.

b) Poiché f prende valori finiti in tutti i punti della retta reale, non esiste asintoto verticale.

La prima condizione per l'esistenza di un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$ è l'esistenza del limite finito

$$m_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3 + 2}}{x}$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \pm \sqrt{\frac{x^2 - 3 + 2}{x^2}} = \pm 1 :$$

Qui abbiamo teniamo conto di

$$x = \pm \big| x \big| = \pm \sqrt{x^2} = \begin{cases} \sqrt{x^2} & \text{se } x \geq 0\,, \\ -\sqrt{x^2} & \text{se } x \leq 0\,, \end{cases}$$

usando nel calcolo del limite per $x \to +\infty$ l'identità $x = \sqrt{x^2}$, e nel calcolo del limite per $x \to -\infty$ l'identità $x = -\sqrt{x^2}$.

La seconda condizione perché esisti un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$, necessariamente di forma

$$y = m_{\pm} x + n_{\pm} = x + n_{\pm}\ ,$$

è l'esistenza del limite finito

$$n_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - m_{+} x \big) = \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) \mp x \big) .$$

Verifichiamo che anche questo limite esiste :

$$n_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} \mp x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 3x + 2}\,\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} \pm x}$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3x + 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} \pm x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3x + 2}{\pm x \left(\sqrt{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}} + 1 \right)}$$
$$= \mp \frac{3}{2} .$$

Cosicché $y = x - \dfrac{3}{2}$ è un asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$, mentre $y = -x + \dfrac{3}{2}$ è un asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$.

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di f, dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}} \ .$$

Rimarchiamo che f non ha derivate finite nei zeri del polinomio

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \ ,$$

cioè nei punti $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, che ancora appartengono al dominio di f. Però anche in questi punti f ammette derivata sinistra rispettivamente destra, magari infinita :

$$\begin{aligned}
f'_s(a_1) &= \lim_{x\to 1-0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{1>x\to 1} -\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} = -\infty \ , \\
f'_d(a_2) &= \lim_{x\to 2+0} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{2<x\to 2} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = +\infty \ .
\end{aligned}$$

Qui abiamo usato che

$$\begin{aligned}
x - 1 &= -\sqrt{(x-1)^2} \ \text{per } x < 1 \,, \\
x - 2 &= \sqrt{(x-2)^2} \ \text{per } x > 2 \,.
\end{aligned}$$

Risulta poi che f' è < 0 in $\big(-\infty\,,1\big)$ ed è > 0 in $\big(2\,,+\infty\big)$, quindi f è

$$\begin{aligned}
&\text{strettamente decrescente in } \big(-\infty\,,1\big] \,, \\
&\text{strettamente crescente in } \big[2\,,+\infty\big) \,.
\end{aligned}$$

In particolare, $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$ sono punti di minimo relativo (di fatto minimi assoluti).

Possiamo trovare gli intervalli di convessità e di concavità di f, e quindi anche i suoi punti di flesso, calcolando la seconda derivata :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{(2x-3)^2}{4\big(x^2-3x+2\big)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}} \\ &= \frac{-(2x-3)^2+4\big(x^2-3x+2\big)}{4\big(x^2-3x+2\big)^{3/2}} \\ &= -\frac{1}{4\big(x^2-3x+2\big)^{3/2}} < 0\,. \end{aligned}$$

Di conseguenza f è concava sia in $\big(-\infty\,,1\big]$ che in $\big[2\,,+\infty\big)$ e non ha punti di flesso.

Riportiamo il comportamento di f' e di f nella seguente tabella :

x	$-\infty$		1	$3/2$	2		$+\infty$
f'		$-$	$-\infty$ |	non definita	| $+\infty$	$+$	
f''		$-$	|	non definita	|	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	non definita	0	$\nearrow$	$+\infty$

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di f : $y = -x + \dfrac{3}{2}$ è asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$. Il grafico di f scende da $+\infty$ fino al punto $(1\,,0)$, dove ha tangente verticale, restando sempre sotto l'asintoto :

Infatti,

$$f(x) = \sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} < \left|x-\frac{3}{2}\right| = -x+\frac{3}{2} \ \text{ per } \ x<1\,.$$

Successivamente il grafico di f sale da $(2\,,0)$, dove ha tangente verticale, fino a $+\infty$, lungo l'asintoto obliquo $y = x - \dfrac{3}{2}$ e restando sotto l'asintoto :

Infatti,

$$f(x) = \sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} < \left|x-\frac{3}{2}\right| = x-\frac{3}{2} \ \text{ per } \ x>2\,.$$

2) : Applicando la formula di Taylor con il resto di Peano alla funzione $\ln(1+x)$ si ottiene

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ per } x \to 0\,.$$

D'altro canto abbiamo

$$\sin(2x) = 2x + o(x^2) \text{ per } x \to 0\,.$$

Usando le regole di calcolo col "piccolo o" si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) = \big(\ln(1+x)\big)\sin(2x) &= \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\big(2x + o(x^2)\big) \\ &= 2x^2 - x^3 + \left(x - \frac{x^2}{2}\right)o(x^2) + 2x\,o(x^2) + o(x^2)\,o(x^2) \\ &= 2x^2 - x^3 + o(x^3) \text{ per } x \to 0\,. \end{aligned}$$

Cosicché il polinomio di Taylor di ordine 3 di f in $x_o = 0$ è

$$2x^2 - x^3$$

ed il limite di

$$\frac{f(x) - 2x^2}{x^3} = \frac{-x^3 + o(x^3)}{x^3} = -1 + \frac{o(x^3)}{x^3}$$

per $x \to 0$ è -1.

3) : La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k(x)}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(x)}{2}\right)^k$$

è una serie geometrica che certamente non converge per

$$\left|\frac{\ln(x)}{2}\right| \geq 1 \iff \big|\ln(x)\big| \geq 2 \iff 0 < x \leq \frac{1}{e^2} \text{ oppure } x \geq e^2$$

perché

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{\ln(x)}{2}\right|^k = \begin{cases} 1 & \text{se } x = \frac{1}{e^2}\,,\, e^2 \\ +\infty & \text{se } 0 < x < \frac{1}{e^2} \text{ oppure } x > e^2 \end{cases} \neq 0\,.$$

Per
$$\left|\frac{\ln(x)}{2}\right| < 1 \iff \big|\ln(x)\big| < 2 \iff \frac{1}{e^2} < x < e^2$$
invece la serie converge assolutamente ed usando la formula
$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}\,, \qquad q \in \mathbb{R}\,,\ |q| < 1$$
possiamo anche calcolare la sua somma :
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k(x)}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(x)}{2}\right)^k = \frac{\dfrac{\ln(x)}{2}}{1-\dfrac{\ln(x)}{2}} = \frac{\ln(x)}{2-\ln(x)}\ .$$
In particolare, per $x = e^{-1}$ abbiamo
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^k(e^{-1})}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}} = -\frac{1}{3}\ .$$

4) **:** Tramite la sostituzione
$$t = \sqrt{x}\,, \qquad \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$
possiamo eliminare la radice quadrata nella funzione da integrare :
$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x}\,)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \arctan(t)\,\mathrm{d}t\ .$$
Usando ora integrazione per parti si ottiene
$$\begin{aligned} 2\int \arctan(t)\,\mathrm{d}t &= 2\left(t\arctan(t) - \int \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= 2t\arctan(t) - \int \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2t\arctan(t) - \ln(1+t^2) + C \end{aligned}$$
e quindi
$$\int \frac{\arctan(\sqrt{x}\,)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\arctan(\sqrt{x}\,) - \ln(1+x) + C\ .$$

5) : Se $z \in \mathbb{C}$ è tale che $z^2 - \overline{z} = 0$, allora

$$|z|^2 = |x^2| = |\overline{z}| = |z|$$

e risulta che o $|z| = 0$, o $|z| = 1$.

A $|z| = 0$ corrisponde la soluzione $z = 0$.

Se invece $|z| = 1$, allora $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ e l'equazione $z^2 - \overline{z} = 0$ è equivalente a $z^3 = 1$. Perciò le soluzioni di modulo 1 dell'equazione sono le radici cubiche complesse dell'unità :

$$\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

Concludiamo che le soluzioni di $z^2 - \overline{z} = 0$ sono :

$$\begin{aligned}
z_o &= 0\ ,\\
z_1 &= \cos\frac{0}{3} + i\sin\frac{0}{3} = 1\ ,\\
z_2 &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\\
z_3 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{z_2}\ .
\end{aligned}$$