NOME: .... **MATRICOLA:** ....

Corso di Laurea in Matematica, A.A. 2010/2011
Analisi Reale e Complessa, Esame del 07.06.2011

1) (a) Si dimostri che per ogni $0 < x \leq 1$ e $s \geq 0$ abbiamo

$$\ln x \leq \ln(x+s) \leq \ln(1+s)\,,$$
$$\big|\ln(x+s)\big| \leq \max\big(-\ln x\,, \ln(1+s)\big)\,.$$

(b) Ricordando che $(0\,,1) \ni x \longmapsto \ln x$ è una funzione appartenente a $L^1\big((0\,,1)\big)$, si verifichi che la formula

$$F(s) := \int_0^1 \frac{\ln(x+s)}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\,, \qquad s \geq 0$$

definisce una funzione continua $F : \big[0\,,+\infty\big) \longrightarrow \mathbb{R}$.

(c) Si dimostri che la funzione F di cui sopra è derivabile in $\big(0\,,+\infty\big)$ e che $F'(s)$ si può calcolare derivando sotto il segno dell'integrale.

2) (a) Si dica se esistono funzioni olomorfe $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ con

$$\big(\mathrm{Re}\,f\big)(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2}\,, \qquad x+iy \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

e nel caso affermativo si trovino tutte tali funzioni.

(b) Si trovino tutte le costanti $\lambda \in \mathbb{R}$ per quali

$$\mathbb{C}\setminus\{0\} \ni x+iy \longmapsto \frac{x}{x^2+y^2} - \lambda\ln(x^2+y^2)$$

è la parte reale di una funzione olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

3) (a) Si verifichi che

$$|\cosh z| \geq \sinh\big(|\mathrm{Re}\, z|\big)\,, \qquad z \in \mathbb{C}$$

dove le funzioni iperboliche cosh e sinh sono definite, come noto, tramite le formule

$$\cosh z := \frac{1}{2}\big(e^z + e^{-z}\big)\,, \quad \sinh z := \frac{1}{2}\big(e^z - e^{-z}\big)\,.$$

(b) Si calcoli l'integrale improprio

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = \lim_{r\to+\infty} \int\limits_{-r}^{r} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$$

usando il teorema dei residui per il rettangolo con vertici

$$-r\,, \quad r\,, \quad r+\pi\, i\,, \quad -r+\pi\, i\,.$$

Poi, confrontando gli integrali

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} \quad \mathrm{e} \quad \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}\,,$$

si calcoli anche

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}\,.$$

Soluzioni:

1) **:** (a) Per ogni $0 < x \leq 1$ e $s \geq 0$ abbiamo

$$0 < x \leq x + s \leq 1 + s$$

e, poiché la funzione $\ln : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è crescente, risulta prima

$$\underbrace{\ln x}_{\leq 0} \leq \ln(x+s) \leq \underbrace{\ln(1+s)}_{\geq 0},$$

e poi

$$\underbrace{\min\big(\ln x\,, -\ln(1+s)\big)}_{= -\max\left(-\ln x\,, \ln(1+s)\right)} \leq \ln(x+s) \leq \max\big(-\ln x\,, \ln(1+s)\big)\,,$$

cioè

$$\big|\ln(x+s)\big| \leq \max\big(-\ln x\,, \ln(1+s)\big)\,.$$

(b) Sia $s_o > 0$ arbitrario. Allora la funzione

$$f : (0\,,1) \ni x \longmapsto \ln(1+s_o) - \ln x \in (0\,, +\infty)$$

appartine a $L^1\big((0\,,1)\big)$:

Infatti,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \big(\underbrace{-\ln x}_{\geq 0}\big)\,\mathrm{d}x &= \lim_{0<\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \big(-\ln x\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{0<\varepsilon\to 0} \big(x - x\ln x\big)\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \big(1 - \varepsilon + \varepsilon\ln\varepsilon\big) \\ &= 1 < +\infty\,.\end{aligned}$$

Ora, siccome

$$\left|\frac{\ln(x+s)}{\sqrt{1+x^2}}\right| \leq \big|\ln(x+s)\big| \leq f(x)\,, \qquad x \in (0\,,1)\,, 0 \leq s \leq s_o\,,$$

$$[0\,, s_o] \ni s \longmapsto \frac{\ln(x+s)}{\sqrt{1+x^2}} \in \mathbb{R} \text{ è continua per ogni } x \in (0\,,1)\,,$$

per il teorema sulla dipendenza continua da parametri reali risulta la continuità di F in $[0\,,s_o]$.

Poiché $s_o \geq 0$ era arbitrario, concludiamo che F è continua.

(c) Per dimostrare che F è derivabile in ogni $s > 0$ e possiamo calcolare $F'(s)$ derivando rispetto ad s sotto il segno dell'integrale, useremo il teorema sulla dipendenza differenziabile da parametri reali.

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario. Siccome

$$\big(\varepsilon\,,+\infty\big) \ni s \longmapsto \frac{\ln(x+s)}{\sqrt{1+x^2}} \in \mathbb{R} \ \text{ è derivabile per ogni } x \in (0\,,1)$$

e

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial s}\frac{\ln(x+s)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(x+s)\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{\varepsilon}\,, \qquad x \in (0\,,1)\,, s \in \big(\varepsilon\,,+\infty\big)\,,$$

ove la funzione costante $\dfrac{1}{\varepsilon}$ appartiene a $L^1\big((0\,,1)\big)$, il teorema sulla dipendenza differenziabile da parametri reali implica la derivabilità di F in $\big(\varepsilon\,,+\infty\big)$ e la validità della formula

$$F'(s) = \int_0^1 \frac{1}{(x+s)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\,. \tag{*}$$

Poiché $\varepsilon > 0$ era arbitrario, la derivabilità di F e la formula di cui sopra vale in ogni $s > 0$.

Rimarco. Volendo, possiamo calcolare $F'(s)$ esplicitamente per ogni $s > 0$.

A questo fine calcoliamo la primitiva

$$\int \frac{1}{(x+s)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

La presenza del fattore $\sqrt{1+x^2}$ nell'integrale di cui sopra suggerisce di usare la sostituzione

$$x = \sinh t\,, \quad \mathrm{d}x = \cosh t\,\mathrm{d}t$$

ottenendo

$$\int \frac{1}{(x+s)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(s+\sinh t)\,\cosh t}\,\cosh t\,\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{1}{s+\sinh t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{2\,s+e^t-e^{-t}}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int \frac{2}{(e^t)^2+2\,s\,e^t-1}\,e^t\,\mathrm{d}t\,.$$

Con la sostituzione $u = e^t$ deduciamo

$$\int \frac{1}{(x+s)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{u^2+2\,s\,u-1}\,\mathrm{d}u$$

e, usando la decomposizione in fratti semplici

$$\frac{2}{u^2+2\,s\,u-1} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\left(\frac{1}{u+s-\sqrt{s^2+1}} - \frac{1}{u+s+\sqrt{s^2+1}}\right),$$

risulta

$$\int \frac{1}{(x+s)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\,\ln\left|\frac{u+s-\sqrt{s^2+1}}{u+s+\sqrt{s^2+1}}\right| + C\,.$$

Resta ora di esprimere u dall'equazione

$$x = \sinh t = \frac{e^t-e^{-t}}{2} = \frac{u-\dfrac{1}{u}}{2} = \frac{u^2-1}{2\,u}$$

e sostituire nell'ugualità precedente. Poiché $u = e^t > 0$, da

$$u^2 - 2\,x\,u - 1 = 0$$

otteniamo $u = x + \sqrt{x^2+1}$, quindi

$$\int \frac{1}{(x+s)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\,\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}+s-\sqrt{s^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}+s+\sqrt{s^2+1}} + C\,.$$

Ora, usando (*), possiamo cocludere che per ogni $s > 0$

$$F'(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\,\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}+s-\sqrt{s^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}+s+\sqrt{s^2+1}}\Bigg|_0^1$$
$$= \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\,\ln\frac{\big(1+\sqrt{2}+s-\sqrt{s^2+1}\big)\big(1+s+\sqrt{s^2+1}\big)}{\big(1+\sqrt{2}+s+\sqrt{s^2+1}\big)\big(1+s-\sqrt{s^2+1}\big)}\,.$$

2) : (a) La funzione $u(x\,,y)$ definita su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tramite la formula

$$u(x\,,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

può essere la parte reale di una funzione olomorfa solo se è armonica. Verifichiamo che è così :

Anzitutto le derivate parziali di u di primo ordine sono:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x\,,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x\,,y) = \frac{-2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Risultano

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x\,,y) = \frac{2\,x^3-6\,x\,y^2}{(x^2+y^2)^3}\,, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x\,,y) = \frac{-2\,x^3+6\,x\,y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x\,,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x\,,y) = 0\,.$$

Ma il dominio $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ non è semplicemente conesso, perciò l'armonicità di u non basta perché sia la parte reale di una funzion olomorfa. Perciò dobbiamo verificare direttamente se le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}(x\,,y) = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x\,,y) = \dfrac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}(x\,,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x\,,y) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}.$$

hanno una soluzione v su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Dalla prima equazione si ottiene

$$v(x\,,y) = \int \frac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{y}{x^2+y^2} + C(y)$$

ove $C(y)$ è una funzione di solo y . Troviamo successivamente $C(y)$ tale che anche la seconda equazione sia soddisfatta, cioè tale che

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x\,,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(y)$$

sia uguale a $\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. Risulta che la funzione $C'(y)$ deve annullarsi identicamente, cioè $C(y)$ dev'essere una costante reale C .

Concludiamo che le funzioni $f(z)$ con la parte reale uguale a u sono della forma

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{x}{x^2+y^2} + \Big(- \frac{y}{x^2+y^2} + C \Big) i \\ &= \frac{x - y\,i}{x^2+y^2} + C\,i = \frac{\overline{z}}{|z|^2} + C\,i \\ &= \frac{1}{z} + C\,i \end{aligned}$$

ove C è una costante reale.

(b) Poiché, come abbiamo già visto in (a), la funzione

$$\mathbb{C}\setminus\{0\} \ni x+iy \longmapsto \frac{x}{x^2+y^2}$$

è la parte reale di una funzione olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, la funzione

$$\mathbb{C}\setminus\{0\} \ni x+iy \longmapsto \frac{x}{x^2+y^2} - \lambda \ln(x^2+y^2)$$

sarebbe la parte reale di una funzione olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ se e soltanto se

$$\mathbb{C}\setminus\{0\} \ni x+iy \longmapsto \lambda \ln(x^2+y^2)$$

fosse la parte reale di una funzione olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Questo è vero per $\lambda = 0$ ovviamente e sarebbe vero per un $\lambda \neq 0$ se e soltanto se

$$\mathbb{C}\setminus\{0\} \ni x+iy \longmapsto \ln(x^2+y^2)$$

fosse la parte reale di una funzione olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Ma questo significherebbe l'esistenza di un logaritmo olomorfo in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, che si sa che non è vero:

> Supponiamo che $g : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ fosse una funzione olomorfa con la proprietà
>
> $$\big(\mathrm{Re}\, g\big)(z) = \ln|z|^2\,, \qquad 0 \neq z \in \mathbb{C}\,.$$
>
> Allora $e^{g(z)}$ è una funzione olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tale che
>
> $$\big|e^{g(z)}\big| = e^{\mathrm{Re}\, g(z)} = |z|^2\,, \qquad 0 \neq z \in \mathbb{C}\,,$$

quindi il modulo della funzione olomorfa $\dfrac{e^{g(z)}}{z^2}$ definita su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ è costante :

$$\left|\frac{e^{g(z)}}{z^2}\right| = 1\,, \qquad 0 \neq z \in \mathbb{C}\,.$$

Per il principio del massimo risulta che $\dfrac{e^{g(z)}}{z^2}$ è identicamente uguale in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ad una costante di modulo 1. Indichiamo questa costante con $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, avendo così

$$e^{g(z)} = e^{i\theta} z^2\,, \qquad 0 \neq z \in \mathbb{C}\,,$$

In particolare abbiamo per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$e^{i\,\mathrm{Im}\,g(e^{it})} = e^{i\theta} e^{2it} = e^{i\,(\theta + 2t)}\,, \text{ quindi } \mathrm{Im}\,g(e^{it}) - \theta + 2t \in 2\pi\mathbb{Z}\,.$$

Ma l'immagine della funzione continua

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \mathrm{Im}\,g(e^{it}) - \theta + 2t$$

è un intervallo e risulta che essa dev'essere costante. Così esiste un $k \in \mathbb{Z}$ con

$$\mathrm{Im}\,g(e^{it}) - \theta + 2t = 2\pi k\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

cioè tale che le funzioni

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \ni t \longmapsto \mathrm{Im}\,g(e^{it}) \\ &\mathbb{R} \ni t \longmapsto 2t + \theta + 2\pi k \end{aligned}$$

coincidono. Questo però non è possibile perché la prima funzione è periodica (di periodo 2π), mentre la seconda è strettamente crescente.

Di conseguenza $\lambda = 0$ è la sola costante $\lambda \in \mathbb{R}$ per quale

$$\mathbb{C}\setminus\{0\} \ni x + iy \longmapsto \frac{x}{x^2 + y^2} - \lambda \ln(x^2 + y^2)$$

è la parte reale di una funzione olomorfa su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

3) : (a) Per ogni $z \in \mathbb{C}$ abbiamo

$$\left|\cosh z\right| = \frac{1}{2}\left|e^z + e^{-z}\right| \geq \frac{1}{2}\left|\left|e^z\right| - \left|e^{-z}\right|\right| = \frac{1}{2}\left|e^{\mathrm{Re}\,z} - e^{-\mathrm{Re}\,z}\right|$$

e, poiché $\left|e^{\mathrm{Re}\,z} - e^{-\mathrm{Re}\,z}\right| = e^{|\mathrm{Re}\,z|} - e^{-|\mathrm{Re}\,z|}$, risulta

$$\left|\cosh z\right| \geq \frac{1}{2}\left(e^{|\operatorname{Re} z|} - e^{-|\operatorname{Re} z|}\right) = \sinh\left(|\operatorname{Re} z|\right).$$

(b) Indichiamo

$$f(z) := \frac{1}{\cosh z}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \left(\left(\pi\,\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2}\right) i\right).$$

Allora f è una funzione meromorfa. Calcoliamo il suo residuo nel polo semplice $\frac{\pi}{2}\,i$: poiché

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{\frac{\pi}{2} i}(f) &= \lim_{z\to\frac{\pi}{2} i}\left(z - \frac{\pi}{2}\,i\right) f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2} i}\frac{z - \frac{\pi}{2}\,i}{\cosh z}\\ &= \lim_{w\to 0}\frac{w}{\cosh\left(w + \frac{\pi}{2}\,i\right)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\cosh\left(w + \frac{\pi}{2}\,i\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{w+\frac{\pi}{2} i} + e^{-w-\frac{\pi}{2} i}\right) = \frac{1}{2}\left(i\,e^{w} - i\,e^{-w}\right)\\ &= i\sinh w\,,\end{aligned}$$

risulta

$$\operatorname*{Res}_{\frac{\pi}{2} i}(f) = \lim_{w\to 0}\frac{w}{i\sinh w} = \frac{1}{i}\,.$$

Sia adesso $r > 0$ e consideriamo la curva chiusa γ_r nel semipiano superiore chiuso che si ottiene componendo

$$\begin{aligned}&\text{il segmento } [-r\,, r]\,,\\ &\text{il segmento } [r\,, r + \pi\,i]\,,\\ &\text{il segmento } [r + \pi\,i\,, -r + \pi\,i]\,,\\ &\text{il segmento } [-r + \pi\,i\,, -r]\,.\end{aligned}$$

Per il teorema dei residui abbiamo

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname*{Res}_{\frac{\pi}{2} i}(f) = 2\pi\,,$$

quindi

$$\int\limits_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{r}^{r+\pi i} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{r+\pi i}^{-r+\pi i} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{-r+\pi i}^{-r} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi \ ,$$

$$\int\limits_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-r+\pi i}^{r+\pi i} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi - \int\limits_{r}^{r+\pi i} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{-r}^{-r+\pi i} f(z)\,\mathrm{d}z \ .$$

Poiché

$$\int\limits_{-r+\pi i}^{r+\pi i} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{-r}^{r} f(x+\pi i)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-r}^{r} \frac{1}{\cosh(x+\pi i)}\,\mathrm{d}x$$

e

$$\cosh(x+\pi i) = \frac{1}{2}\left(e^{x+\pi i} + e^{-x-\pi i}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = -\cosh x \ ,$$

risultano successivamente

$$\int\limits_{-r+\pi i}^{r+\pi i} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int\limits_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x \ ,$$

$$2\int\limits_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi - \int\limits_{r}^{r+\pi i} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{-r}^{-r+\pi i} f(z)\,\mathrm{d}z \ .$$

Ora la stima

$$\begin{aligned} \Bigg|\int\limits_{r}^{r+\pi i} f(z)\,\mathrm{d}z\Bigg| &\leq \int\limits_{r}^{r+\pi i} \big|f(z)\big|\,\mathrm{d}|z| = \int\limits_{r}^{r+\pi i} \frac{1}{|\cosh z|}\,\mathrm{d}|z| \\ &\overset{\text{(a)}}{\leq} \int\limits_{r}^{r+\pi i} \frac{1}{\sinh \operatorname{Re} z}\,\mathrm{d}|z| \\ &= \frac{\pi}{\sinh r}\ , \qquad r > 0 \end{aligned}$$

implica

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{r}^{r+\pi i} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \ .$$

Similmente si verifica che abbiamo anche

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{-r}^{-r+\pi i} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\ .$$

Risulta

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} &= \lim_{r\to+\infty} \int\limits_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2}\left(2\pi - \int\limits_{r}^{r+\pi i} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{-r}^{-r+\pi i} f(z)\,\mathrm{d}z \right) \qquad (**) \\
&= \pi\ .
\end{aligned}$$

Per calcolare

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$$

basta osservare che cosh è una funzione pari e così (**) implica

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = \frac{\pi}{2}\ .$$

Rimarco. L'integrale $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}$ possiamo calcolare anche con metodi standard del calcolo integrale:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = \int \frac{2}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\,e^x}{1 + (e^x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{arctg}\, e^x\ ,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = 2\,\mathrm{arctg}\, e^x \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = \pi\ .$$

La soluzione del compito richiede però il calcolo usando il teorema dei residui nella situazione indicata.