**NOME:** . . . . . . . . . . . . . . . . . **MATRICOLA:** . . . . . . . . . . . . . . . . .

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2008/2009
Calcolo 1, Esame scritto del 06.02.2009

1) Consideriamo la funzione

$$f(x) = \cos \frac{\pi\, x}{1 + x^2}\,.$$

a) Determinare il dominio (massimale) di $f$ .

b) Trovare tutti gli asintoti di $f$ .

c) Trovare tutti i massimi e minimi locali di $f$ .

d) Tracciare un grafico qualitativo per $f$ .

2) Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{3 + 5\,\mathrm{tg}\, x}\,.$$

3) Dire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \right)$$

e si giustifichi la risposta.

4) Sia la funzione $f$ definita sulla regione angolare $\{(x\,,y)\,;\,x > |y|\}$ tramite la formula

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2y} \log \dfrac{x+y}{x-y} & \text{se } y \neq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } y = 0 \end{cases} ,$$

Si trovino :

a) tutti i punti di continuità di $f$,

b) tutti i punti nei quali esistono ambedue derivate parziali.

5) Dire se è esatta la forma differenziale

$$\left( \frac{1}{x^2 - y^2} - \frac{\log(x+y)}{(x-y)^2} \right) \mathrm{d}x + \left( \frac{1}{x^2 - y^2} + \frac{\log(x+y)}{(x-y)^2} \right) \mathrm{d}y \,,$$

definita sulla regione angolare $\{(x\,,y)\,;\,x > |y|\}$ . Nel caso di esattezza si calcoli una sua primitiva.

**Soluzioni:**

1) **:** a) Il dominio di $f$ è ovviamente l'insieme $\mathbb{R}$ di tutti i numeri reali.

b) Poiché $f$ prende valori finiti in tutti i punti della retta reale, non esiste asintoto verticale.

Si vede subito pure che esiste il limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \overset{\cos\text{ è continua}}{=} \cos\left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\pi\, x}{1+x^2}\right) = \cos 0 = 1\,.$$

Cosicché $y = 1$ è asintoto orizzontale (un tipo particolare di asintoto obliquo) sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$ .

c) Per trovare gli intervalli di monotonia e gli extremi locali di $f$ , dobbiamo prima calcolare la sua derivata :

$$f'(x) = \left(-\sin\frac{\pi\, x}{1+x^2}\right)\pi\,\frac{1+x^2-2\,x^2}{(1+x^2)^2} = \pi\,\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}\,\sin\frac{\pi\, x}{1+x^2}\,.$$

Poiché $f'$ si annulla in $-1\,,0\,,1$ , è $> 0$ in $(-1\,,0)$ e $(1\,,+\infty)$ , e $< 0$ in $(-\infty\,,-1)$ e $(0\,,1)$ , risulta che $f$ è

strettamente decrescente in $(-\infty\,,-1)$ ,
strettamente crescente in $(-1\,,0)$ ,
strettamente decrescente in $(0\,,1)$ ,
strettamente crescente in $(1\,,+\infty)$ .

In particolare, $-1\,,1$ sono punti di minimo locale e $0$ è un punto di massimo locale.

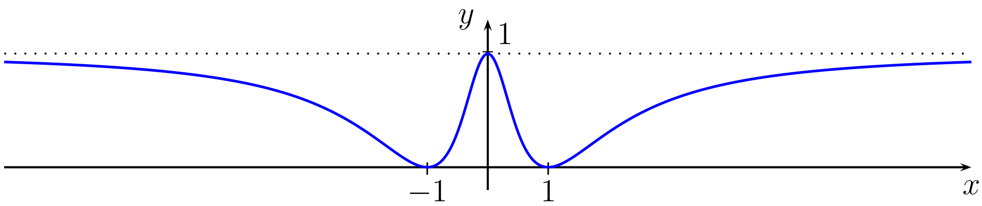
Riportiamo il comportamento di $f'$ e di $f$ nella seguente tabella :

| $x$ | $-\infty$ | | -1 | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f$ | 1 | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | 1 | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | 1 |

d) Usando le informazioni di cui sopra, è facile tracciare il grafico di $f$ :

$y = 1$ è asintoto orizzontale di $f$ per $x \to -\infty$ . Il grafico di $f$ scende da 1 fino al punto di minimo locale $(-1\,,0)$ , nel quale ha tangente orizzontale, poi sale al punto di massimo locale $(0\,,1)$ , nel quale ha di nuovo tangente orizzontale, dopo di che scende al punto di minimo locale $(1\,,0)$ , pure con tangente orizzontale, e finalmente sale verso l'asintoto orizzontale $y = 1$ per $x \to +\infty$ .

**Il grafico di $f$ :**




**Commenti sui punti di flesso di $f$ .**

Guardando il grafico di $f$ ci accorgiamo che attorno al punto di massimo locale 0 $f$ dev'essere concava, poi attorno al punto di minimo locale 1 $f$ dev'essere convessa, e finalmente, avvicinando l'asintoto orizzontale $y = 1$ da sotto sempre di più per $x \to +\infty$ , $f$ deve diventare di nuovo concava. Perciò tra 0 e 1 dovrebbe esistere almeno un punto di transizione da concavità a convessità, cioè un punto di flesso, e poi dopo 1 dovrebbe esistere almeno un punto di transizione da convessità a concavità, cioè un'altro punto di flesso. Poiché $f$ è una funzione pari, anche gli opposti di questi punti di flesso saranno punti di flesso.

In questi commenti ci proponiamo di identificare tutti i punti di flesso di $f$ . A questo fine calcoliamo la seconda derivata di $f$ :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\pi\,\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}\,\sin\frac{\pi\,x}{1+x^2}\right) \\ &= \pi\,\frac{2\,x\,(1+x^2)^2-(x^2-1)\,2\,(1+x^2)\,2\,x}{(1+x^2)^4}\,\sin\frac{\pi\,x}{1+x^2} \\ &\qquad\qquad + \pi\,\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}\,\cos\frac{\pi\,x}{1+x^2}\,\pi\,\frac{1+x^2-2\,x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2\,\pi\,x\,(3-x^2)}{(1+x^2)^3}\,\sin\frac{\pi\,x}{1+x^2}-\frac{\pi^2(x^2-1)^2}{(1+x^2)^4}\,\cos\frac{\pi\,x}{1+x^2}\ . \end{aligned} \tag{*}$$

Poiché $f''$ è pari, basta studiare il segno di $f''(x)$ solo per $x \geq 0$.

Anzitutto, $\dfrac{x}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{2}$ per ogni $x \geq 0$, con ugualità solo per $x = 1$.

Infatti,

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \iff 2x \leq 1 + x^2 \iff 0 \leq 1 + x^2 - 2x = (1-x)^2.$$

Risulta che

$$0 \leq \sin\frac{\pi x}{1+x^2} \leq 1\,,\ 0 \leq \cos\frac{\pi x}{1+x^2} \leq 1\,, \qquad x \geq 1$$

e

$$\begin{aligned} \sin\frac{\pi x}{1+x^2} = 0 &\iff x = 0 \iff \cos\frac{\pi x}{1+x^2} = 1\,, \\ \sin\frac{\pi x}{1+x^2} = 1 &\iff x = 1 \iff \cos\frac{\pi x}{1+x^2} = 0\,, \end{aligned}$$

Tenendo conto di (*) si vede che

$$f''(x) < 0\,, \qquad x \geq \sqrt{3} \approx 1,7320508\,.$$

Punti rilevanti tra $0$ e $\sqrt{3}$ sono $0\,, 1\,, \sqrt{3}$. Aggiungiamo anche il punto $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ nel quale abbiamo $\sin\dfrac{\pi x}{1+x^2} = \cos\dfrac{\pi x}{1+x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, perché in questo punto possiamo calcolare facilmente $f''(x)$: poiché

$$\sin\frac{\pi x}{1+x^2} = \cos\frac{\pi x}{1+x^2} \iff \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{4} \iff x = 2 \pm \sqrt{3}\,,$$

il punto cercato è $2 - \sqrt{3} \approx 0,267949$.

Il valore di $f''(x)$ nei punti $0 < 2 - \sqrt{3} < 1 < \sqrt{3}$ sono

$$\begin{aligned} f''(0) &= -\pi^2 < 0\,, \\ f''\big(2-\sqrt{3}\big) &= \frac{\pi\Big(8\big(\sqrt{3}-1\big) - 3\pi\Big)}{64\,(2-\sqrt{3})^2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} < 0\,, \\ f''(1) &= \frac{\pi}{2} > 0\,, \\ f''\big(\sqrt{3}\big) &= -\frac{\pi^2}{64}\,\cos\frac{\pi\sqrt{3}}{4} < 0\,. \end{aligned}$$

Determinare il segno di $f''(x)$ anche tra questi punti non è compito facile, perché $f''(x)$ è una non esplicitamente controllabile somma di due addendi di segno opposto, ogniuno un prodotto di una funzione razionale e la composizione di una funzione trigonometrica con una funzione razionale. Fortunatamente possiamo semplificare la situazione rescrivendo la formula (*) per $f''(x)$ come prodotto di un fattore che resta $> 0$ in tutto il tratto $\big(0\,,\sqrt{3}\big)$, e perciò non ci da fastidio anche se è complicato, ed un altro fattore $g(x)$ che è la somma della tangente di una funzione razionale ed una seconda funzione razionale :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2\pi\, x\,(3-x^2)}{(1+x^2)^3} \left(\cos\frac{\pi\, x}{1+x^2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\pi\, x}{1+x^2} - \frac{\pi\,(x^2-1)^2}{2\,x\,(1+x^2)(3-x^2)}\right) \\ &= \frac{2\pi\, x\,(3-x^2)}{(1+x^2)^3} \left(\cos\frac{\pi\, x}{1+x^2}\right) g(x)\ . \end{aligned}$$

Il primo addendo nella formula per $g(x)$ è la composizione della funzione tg, che è strettamente crescente su $\Big[0\,,\dfrac{\pi}{2}\Big)$, e la funzione $\dfrac{\pi\, x}{1+x^2}$, che cresce strettamente su $[0\,,1]$ e decresce poi strettamente su $[1\,,+\infty)$. Ma anche la funzione $\dfrac{\operatorname{tg} u}{u}$ $(=1$ in $u=0)$ è strettamente crescente su $\Big[0\,,\dfrac{\pi}{2}\Big)$ :

Infatti,

$$\left(\frac{\operatorname{tg} u}{u}\right)' = \frac{1}{u\cos^2 u} - \frac{\operatorname{tg} u}{u^2} = \frac{u-(\sin u)(\cos u)}{u^2\cos^2 u} = \frac{2\,u - \sin(2\,u)}{2\,u^2\cos^2 u}$$

è $> 0$ per ogni $0 < u < \dfrac{\pi}{2}$.

Questa osservazione ci permette una ulteriore semplificazione della situazione sostituendo $g(x)$ con la somma $h(x)$ della composizione di $\dfrac{\operatorname{tg} u}{u}$ con una funzione razionale ed una seconda funzione razionale che è più semplice della seconda funzione razionale nella formula per $g(x)$ :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2\pi^2 x^2(3-x^2)}{(1+x^2)^4} \left(\cos\frac{\pi\, x}{1+x^2}\right)\left(\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi\, x}{1+x^2}}{\dfrac{\pi\, x}{1+x^2}} - \frac{(x^2-1)^2}{2\,x^2(3-x^2)}\right) \\ &= \frac{2\pi^2 x^2(3-x^2)}{(1+x^2)^4} \left(\cos\frac{\pi\, x}{1+x^2}\right) h(x)\ . \end{aligned}$$

Ora la derivata della funzione

$$-\frac{(x^2-1)^2}{2\,x^2(3-x^2)} = \frac{1}{2}\,\frac{x^4-2\,x^2+1}{x^4-3\,x^2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{x^2+1}{x^4-3\,x^2}$$

è

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\biggl(-\frac{(x^2-1)^2}{2\,x^2(3-x^2)}\biggr) &= \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\biggl(\frac{x^2+1}{x^4-3\,x^2}\biggr)\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{2\,x\,(x^4-3\,x^2)-(4\,x^3-6\,x)(x^2+1)}{(x^4-3\,x^2)^2}\\ &= \frac{-\,x^5-2\,x^3+3\,x}{(x^4-3\,x^2)^2}\\ &= \frac{x(1-x^2)(x^2+3)}{(x^4-3\,x^2)^2}\,,\end{aligned}$$

perciò

$$-\frac{(x^2-1)^2}{2\,x^2(3-x^2)}\ \text{è strettamente crescente in } (0\,,1)$$
$$\text{e strettamente decrescente in } \bigl(1\,,\sqrt{3}\bigr)\,,$$

Siccome la stessa cosa vale anche per la composizione $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi\,x}{1+x^2}}{\dfrac{\pi\,x}{1+x^2}}$ di $\dfrac{\operatorname{tg} u}{u}$ con $\dfrac{\pi\,x}{1+x^2}$, la loro somma

$$h(x)\ \text{è strettamente crescente in } (0\,,1)$$
$$\text{e strettamente decrescente in } \bigl(1\,,\sqrt{3}\bigr)\,.$$

Ma si vede facilmente che

$$\lim_{x\to 1} h(x) = +\infty\,,\quad \lim_{x\to\sqrt{3}-} h(x) = -\infty\quad \bigl(h \text{ non è definita in } 1 \text{ e } \sqrt{3}\bigr)$$

e, tenendo conto dell'ugualità

$$f''(x) = \frac{2\,\pi^2 x^2(3-x^2)}{(1+x^2)^4}\biggl(\cos\frac{\pi\,x}{1+x^2}\biggr)\,h(x) \qquad (**)$$

e del fatto già verificato $f''(2-\sqrt{3})<0$, vediamo che anche

$$h(2-\sqrt{3}) < 0\,.$$

Risulta che

$$\begin{aligned} h(x) \ &\text{è strettamente crescente in } (0\,,1) \\ &\text{e si annulla in un solo punto } 2-\sqrt{3} < a_1 < 1 \end{aligned}$$

nonché

$$\begin{aligned} h(x) \ &\text{è strettamente decrescente in } \big(1\,,\sqrt{3}\big) \\ &\text{e si annulla in un solo punto } 1 < a_2 < \sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

Usando (**) concludiamo che in $\big[0\,,\sqrt{3}\big)$ $f''(x)$ si annulla nei due punti $2-\sqrt{3} < a_1 < 1$ e $1 < a_2 < \sqrt{3}$, e valgono

$$\begin{aligned} &f''(x) < 0 \text{ per } x < a_1\,, \\ &f''(x) > 0 \text{ per } a_1 < x < a_2\,, \\ &f''(x) < 0 \text{ per } x > a_2\,. \end{aligned}$$

Cosicché i punti di flesso di $f$ sono

$$-\sqrt{3} < -a_2 < -1 < -a_1 < \sqrt{3}-2 < 2-\sqrt{3} < a_1 < 1 < a_2 < \sqrt{3}$$

e, poiché, come abbiamo già visto, $f''(x) < 0$ per $|x| \geq \sqrt{3}$,

$$\begin{aligned} &f \text{ è concava in } (-\infty\,,-a_2)\,, \\ &f \text{ è convessa in } (-a_2\,,-a_1)\,, \\ &f \text{ è concava in } (-a_1\,,a_1)\,, \\ &f \text{ è convessa in } (a_1\,,a_2)\,, \\ &f \text{ è concava in } (a_2\,,+\infty)\,. \end{aligned}$$

**2) :** Possiamo usare la sostituzione $t = \operatorname{tg} x$:

$$x = \operatorname{arctg} t\,, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Si ottiene

$$\int \frac{1}{3+5\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3+5t}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(3+5t)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Lo sviluppo di $\dfrac{1}{(3+5\,t)(1+t^2)}$ in fratti semplici è dalla forma

$$\frac{1}{(3+5\,t)(1+t^2)} = \frac{a}{3+5\,t} + \frac{b\,t+c}{1+t^2}$$

ed allora

$$1 = a\,(1+t^2) + (b\,t+c)(3+5\,t)\ .$$

Risultano

$$a = \frac{25}{34}\,, \quad b\,t+c = \frac{-\,5\,t+3}{34}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{3+5\,\mathrm{tg}\,x}\,\mathrm{d}x = & = \int \frac{1}{(3+5\,t)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
& = \frac{25}{34}\int \frac{1}{3+5\,t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{34}\int \frac{-\,5\,t+3}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
& = \frac{5}{34}\log|3+5\,t| - \frac{5}{68}\int \frac{2\,t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{3}{34}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
& = \frac{5}{34}\log|3+5\,t| - \frac{5}{68}\,\log\,(1+t^2) + \frac{3}{34}\,\mathrm{arctg}\,t + C \\
& = \frac{5}{34}\log\big|3+5\,\mathrm{tg}\,x\big| - \frac{5}{68}\log\big(1+\mathrm{tg}^2 x\big) + \frac{3}{34}\,x + C \\
& = \frac{3}{34}\,x + \frac{5}{34}\log\big|3+5\,\mathrm{tg}\,x\big| - \frac{5}{68}\,\log\frac{1}{\cos^2 x} + C \\
& = \frac{3}{34}\,x + \frac{5}{34}\log\big|\big(3+5\,\mathrm{tg}\,x\big)\cos x\big| + C \\
& = \frac{3}{34}\,x + \frac{5}{34}\log\big|3\,\cos x + 5\,\sin x\big| + C\ .
\end{aligned}$$

**3) :** Anzitutto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right)$$

è a termini positivi :

$$\log\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n}\,\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{n}\,\log e = \frac{1}{n}\,.$$

Per ottenere una stima opportuna del termine $\dfrac{1}{n} - \log \dfrac{n+1}{n}$ , usiamo la formula di Taylor con il resto di Peano per il logaritmo naturale :

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \ \text{ per } \ x \longrightarrow 0$$

implica

$$\log \frac{n+1}{n} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \ \text{ per } \ n \longrightarrow \infty$$

cioè

$$\frac{\dfrac{1}{n} - \log \dfrac{n+1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} + \frac{o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}} \ \text{ per } \ n \longrightarrow \infty\,.$$

In altre parole,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n} - \log \dfrac{n+1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

e, usando la convergenza nota della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ed applicando il criterio del confronto asintotico, risulta che anche la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n}\right)$ converge.

**4) :** a) Chiaramente $f$ è continua in ogni punto $(a\,,b)$ con $a > |b| > 0$ . Per la continuità in $(a\,,0)$ con $a > 0$ dobbiamo avere

$$\lim_{(a,0)\neq(x,y)\to(a,0)} f(x\,,y) = \frac{1}{a}\ ,$$

cioè

$$\lim_{\substack{x\to a\\ 0\neq y\to 0}} \frac{1}{2\,y} \log \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{a} \ \text{ insieme con } \ \lim_{a\neq x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}\ .$$

La seconda ugualità è imediata. Per la verifica della prima ugualità scriviamo

$$\frac{1}{2y}\log\frac{x+y}{x-y}=\frac{1}{2y}\log\left(1+\frac{2y}{x-y}\right)=\frac{1}{x-y}\cdot\frac{\log\left(1+\dfrac{2y}{x-y}\right)}{\dfrac{2y}{x-y}}$$

Ora, poiché

$$\lim_{\substack{x\to a\\ 0\neq y\to 0}}\frac{2y}{x-y}=0$$

ed abbiamo il limite noto

$$\lim_{u\to 0}\frac{\log(1+u)}{u}=1\ ,$$

risulta per composizione

$$\lim_{\substack{x\to a\\ 0\neq y\to 0}}\frac{\log\left(1+\dfrac{2y}{x-y}\right)}{\dfrac{2y}{x-y}}=1\ .$$

Dall'altra parte

$$\lim_{\substack{x\to a\\ 0\neq y\to 0}}\frac{1}{x-y}=\frac{1}{a}$$

e così concludiamo che infatti

$$\lim_{\substack{x\to a\\ 0\neq y\to 0}}\frac{1}{2y}\log\frac{x+y}{x-y}=\left(\lim_{\substack{x\to a\\ 0\neq y\to 0}}\frac{1}{x-y}\right)\cdot\lim_{\substack{x\to a\\ 0\neq y\to 0}}\frac{\log\left(1+\dfrac{2y}{x-y}\right)}{\dfrac{2y}{x-y}}=\frac{1}{a}\ .$$

Di conseguenza $f$ è continua in ogni punto del suo dominio.

b) Di nuovo è chiaro che $f$ ha ambedue derivate parziali (ed è addirittura differenziabile) in ogni punto $(a\,,b)$ con $a>|b|>0$.

Poi è facile vedere l'esistenza della derivata parziale di $f$ rispetto ad $x$ anche in un punto di forma $(a\,,0)$ con $a>0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a\,,0)=\lim_{a\neq x\to a}\frac{f(x\,,0)-f(a\,,0)}{x-a}=\lim_{a\neq x\to a}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}}{x-a}=-\,\frac{1}{a^2}\ .$$

Per l'esistenza della derivata parziale $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a\,,0)$ dobbiamo verificare l'esistenza del limite finito

$$\lim_{0\neq y\to 0}\frac{f(a\,,y)-f(a\,,0)}{y-0}=\lim_{0\neq y\to 0}\frac{1}{y}\left(\frac{1}{2y}\,\log\frac{a+y}{a-y}-\frac{1}{a}\right)$$

Ora usiamo la formula di Taylor con il resto di Peano per il logaritmo naturale :

$$\log(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o\,(u^2)\ \text{ per }\ u\to 0\ .$$

Si ottiene successivamente

$$\begin{aligned}
\log\frac{a+y}{a-y} &= \log\left(1+\frac{2y}{a-y}\right)\\
&= \frac{2y}{a-y}-\frac{1}{2}\Big(\frac{2y}{a-y}\Big)^2+o\bigg(\Big(\frac{2y}{a-y}\Big)^2\bigg)\\
&= \frac{2y}{a-y}-\frac{2y^2}{(a-y)^2}+o\,(y^2)\ \text{ per }\ y\to 0\ ,\\
\frac{1}{2y}\,\log\frac{a+y}{a-y} &= \frac{1}{a-y}-\frac{y}{(a-y)^2}+o\,(y)\ \text{ per }\ y\to 0\ ,\\
\frac{1}{2y}\,\log\frac{a+y}{a-y}-\frac{1}{a} &= \frac{1}{a-y}-\frac{1}{a}-\frac{y}{(a-y)^2}+o\,(y)\\
&= -\,\frac{y^2}{a\,(a-y)^2}+o\,(y)\ \text{ per }\ y\to 0
\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{1}{y}\left(\frac{1}{2y}\,\log\frac{a+y}{a-y}-\frac{1}{a}\right)=-\,\frac{y}{a\,(a-y)^2}+o\,(1)\ \text{ per }\ y\to 0\ .$$

In altre parole, esiste

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a\,,0)=\lim_{0\neq y\to 0}\frac{1}{y}\left(\frac{1}{2y}\,\log\frac{a+y}{a-y}-\frac{1}{a}\right)=0\ .$$

Di conseguenza esistono ambedue derivate parziali di $f$ in ogni punto del suo dominio.

5) **:** Ricordiamo che una forma differenziale

$$P(x\,,y)\,\mathrm{d}x + Q(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

si chiama *chiusa* se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

e si chiama *esatta* se ammette una *primitiva*, cioè una funzione $F(x\,,y)$ definita sullo stesso dominio che soddisfa

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q\,. \tag{***}$$

Se una forma differenziale

$$P(x\,,y)\,\mathrm{d}x + Q(x\,,y)\,\mathrm{d}y$$

e esatta e le funzioni $P$ e $Q$ sono continuamente differenziabili, allora la forma è necessariamente chiusa. L'implicazione reciproca non è in generale vera, ma una forma differenziale chiusa, definita su un dominio stellato (in particolare, se il dominio è convesso), è automaticamente esatta.

La nostra forma è esatta. Infatti,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2-y^2} - \frac{\log(x+y)}{(x-y)^2}\right)\\
&= \frac{2\,y}{(x^2-y^2)^2} - \frac{1}{(x-y)^2(x+y)} - \frac{2}{(x-y)^3}\,\log(x+y)\\
&= \frac{y-x}{(x^2-y^2)^2} - \frac{2}{(x-y)^3}\,\log(x+y)
\end{aligned}$$

è uguale a

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2-y^2} + \frac{\log(x+y)}{(x-y)^2}\right)\\
&= -\,\frac{2\,x}{(x^2-y^2)^2} + \frac{1}{(x-y)^2(x+y)} - \frac{2}{(x-y)^3}\,\log(x+y)\\
&= \frac{y-x}{(x^2-y^2)^2} - \frac{2}{(x-y)^3}\,\log(x+y)\,.
\end{aligned}$$

Poiché il dominio angolare della forma è convesso, la forma risulta esatta.

Per trovare una primitiva, dobbiamo risolvere il sistema (***). A questa fine integriamo $P$ rispetto ad $x$: usando integrazione per parti risulta

$$\begin{aligned}
F(x\,,y) &= \int\left(\frac{1}{x^2-y^2}-\frac{\log(x+y)}{(x-y)^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int\frac{1}{x^2-y^2}\,\mathrm{d}x+\int\Big(\log(x+y)\Big)\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x-y}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int\frac{1}{x^2-y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{\log(x+y)}{x-y}-\int\frac{1}{(x+y)(x-y)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\log(x+y)}{x-y}+C(y)
\end{aligned}$$

ove $C(y)$ è un valore costante rispetto ad $x$, ossia una funzione solo di $y$. Ora scegliamo $C(y)$ tale che anche la seconda equazione del sistema (***) sia soddisfatta : poiché

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y}(x\,,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\log(x+y)}{x-y}+C(y)\right) \\
&= \frac{1}{(x+y)(x-y)}-\frac{1}{(x-y)^2}\log(x+y)+C'(y) \\
&= \frac{1}{x^2-y^2}-\frac{\log(x+y)}{(x-y)^2}+C'(y)
\end{aligned}$$

sia uguale a

$$\frac{1}{x^2-y^2}-\frac{\log(x+y)}{(x-y)^2}\,,$$

$C'(y)$ deve annullarsi, quindi $C(y)$ dev'essere costante. Di conseguenza le primitive della nostra forma sono

$$F(x\,,y)=\frac{\log(x+y)}{x-y}+C\,.$$